Integrale improprio su intervallo limitato e assoluta convergenza

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Criteri di confronto

Studio della convergenza dell'integrale improprio (senza il calcolo della primitiva che potrebbe non essere possibile)

Tipi di convergenza:

- **Assoluta convergenza** (per le funzioni a segno alterno) (questo video)
- Criterio del confronto per funzioni a segno costante (prossima lezione)

> **Definizione (assoluta convergenza)** Sia $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile su $[a,b)$. Si dice che f è **assolutamente convergente** sse
>
> $$\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$$

Teorema

Sia $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione (eventualmente con segno alterno) localmente integrabile su $[a,b)$ tale che $\int_a^b |f(x)|\ dx$ converga.
Allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge e

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$$

Nota:

- La convergenza assoluta implica la convergenza semplice
- Se non converge assolutamente non possiamo dire nulla sulla convergenza semplice

Esempi fondamentali

Vediamo i diversi casi

Ricordiamo che

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \alpha < 1 \\ \text{divergente} & \text{se } \alpha \geqslant 1 \end{cases}$$

Esempio 1
(funz. assolutamente integrabile)

> Studiare l'assoluta convergenza di $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$

Soluzione

Da

$$\int_0^1 \left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

si ha che

- l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ è convergente per la convergenza degli infiniti fondamentali con $\alpha < 1$
- quindi, l'integrale converge assolutamente e quindi anche in modo semplice

Esempio 2 (tipico sbaglio)

> Studiare la convergenza di $$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Soluzione

Sappiamo che $\frac{\sin x}{x}$ è una funzione continua prolungabile con continuità in 0 e quindi $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ è convergente

La funzione è positiva è quindi il valore assoluto coincide con quello della funzione

Esempio 2 (tipico sbaglio)

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Se avessimo utilizzato il criterio della convergenza assoluta, si avrebbe

$$\int_0^1 \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$$

dove l'ultimo integrale è divergente (convergenza degli infiniti fondamentali con $\alpha = 1$)

Nota: Quindi, non si potrebbe concludere nulla sulla convergenza dell'integrale originario

Alcuni studenti concludono che l'integrale è non è convergente (in realtà lo è)

Esempio 3
(non ass. integrabile ma integrabile)

> Studiare l'assoluta convergenza di $$\int_0^1 \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$ per $x \in (0, 1]$

Soluzione

Ricordiamo che

- l'integrale di $\int_0^1 f(x)\,dx$ è convergente (lezione precedente)
- $|\cos x| \geqslant \cos^2 x$ perché il quadrato di un numero compreso tra 0 e 1 è più piccolo del numero di partenza
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ per la formula di bisezione

Esempio 3
(non ass. integrabile ma integrabile)

Quindi, per $x \in [0,1]$ si ha

$$\left|\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \geqslant \frac{1}{x}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x}\left(1+\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)$$

e quindi

$$\int_t^1 \left|\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx \;\geqslant \int_t^1 \frac{1}{2x}\,dx + \frac{1}{4}\int_t^1 \frac{2}{x}\cos\left(\frac{2}{x}\right) dx$$

Esempio 3
(non ass. integrabile ma integrabile)

$$\int_t^1 \left| \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| dx \;=\; \int_t^1 \frac{1}{2x}\, dx + \frac{1}{4} \int_t^1 \frac{2}{x} \cos\left(\frac{2}{x}\right) dx$$

Si ha per $t \to 0^+$

- $\int_0^1 \frac{1}{2x}\, dx$ è divergente
- $\int_0^1 \frac{2}{x} \cos\left(\frac{2}{x}\right) dx$ è convergente (già visto nella lezione precedente)

e quindi, l'integrale è assolutamente divergente, mentre l'integrale originario è convergente

Esempio 4 (non ass. integrabile e non integrabile)

> Studiare l'assoluta convergenza di $\int_0^1 \frac{1}{x}$

Soluzione

Chiaramente, per $x \in (0, 1]$ si ha

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{x}\right| dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$$

che divergono entrambi per la convergenza degli infiniti fondamentali con $\alpha = 1$

Integrale nel senso del valor proprio (o valor principale)

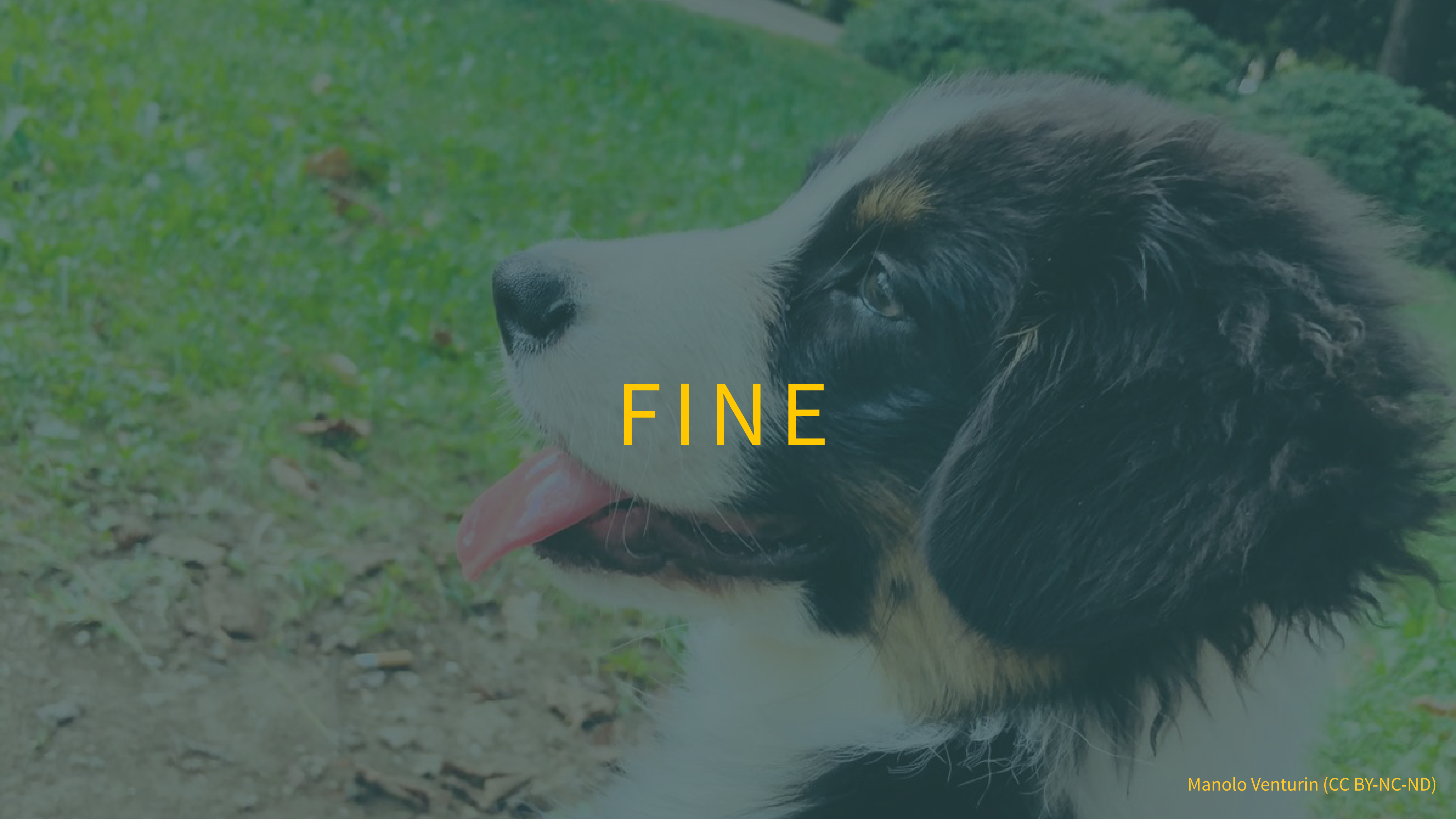
L'integrale nel senso del valor principale (concetto utilizzattissimo in analisi complessa) è definito come l'integrale generalizzato di una funzione effettuato su intervalli simmetrici rispetto ad una singolarità

Quindi

$$\text{p.v.} \int \frac{1}{x}\, dx = 0$$

perché

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = 0$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)