

Integrale improprio su intervallo limitato

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Definizione del problema

Sviluppo della teoria per l'intervallo  $[a, b)$  con

- Dominio di  $f$  limitato: ad esempio  $[a, b)$
- $f$  non limitata: ad esempio per  $x \rightarrow b^-$  si ha  $f(x) \rightarrow \pm\infty$

## Definizione

Una funzione  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  si dice localmente integrabile su  $[a, b)$  se è integrabile in ogni suo sotto-intervallo  $[c, d]$

# Integrale improprio di funzioni continue non limitate

Sia  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione localmente integrabile su  $[a, b)$  tale che esista finito il limite:

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

allora si dice che  $f(x)$  ammette **integrale improprio** (convergente) su  $[a, b]$  e si scrive

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

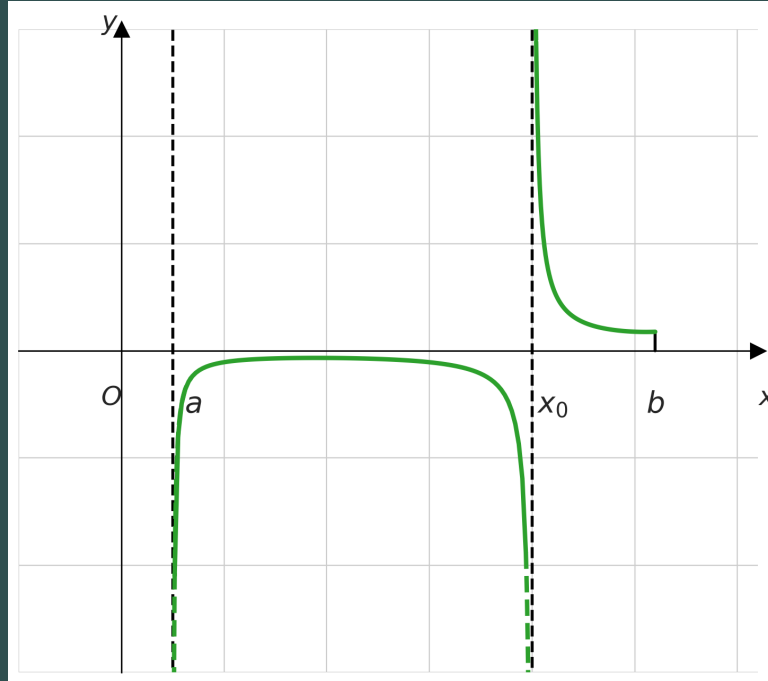
Diremo che

- l'integrale di  $f$  **diverge** positivamente o negativamente se il limite vale  $+\infty$  o  $-\infty$
- l'integrale improprio di  $f$  **oscilla** o **non esiste** se il limite non esiste

# Casi simili

1. Analoga definizione per il caso  $(a, b]$
2. Se il dominio di  $f$  è  $(a, b)$  allora l'integrale è convergente sse è convergente in  $(a, x_0]$  e in  $[x_0, b)$  per un  $x_0$  opportuno
3. Se il dominio di  $f$  è  $[a, b] \setminus \{x_0\}$  allora l'integrale è convergente sse è convergente in  $[a, x_0)$  e in  $(x_0, b]$
4. Analogo discorso se  $f$  ha un numero finito di discontinuità

# Esempio



Per la funzione rappresentata in figura bisogna studiare il comportamento dell'integrale in

- $x = a$ : estremo sinistro (da destra)
- $x = x_0$ : punto interno dove l'integranda non è definita e vale  $(\pm\infty)$
- in  $x = b$  non c'è bisogno di studiare il comportamento perché ha un valore finito

# Relazioni con le funzioni continue e limitate

## Teorema

Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a, b)$  e limitata in  $x = b$  allora  $f$  ha integrale improprio convergente e quest'ultimo coincide con il suo valore di Riemann

## Casi possibili:

1.  $f$  continua **prolungabile con continuità** (ipotesi del teorema verificate) e quindi si conclude che l'integrale è convergente
2.  $f$  continua con limite all'**estremo limitato** (ipotesi del teorema verificate) e quindi si conclude che l'integrale è convergente
3. Se  $f$  continua con limite all'estremo non esistente (ipotesi del teorema non verificate) l'integrale può essere sia convergente che divergente

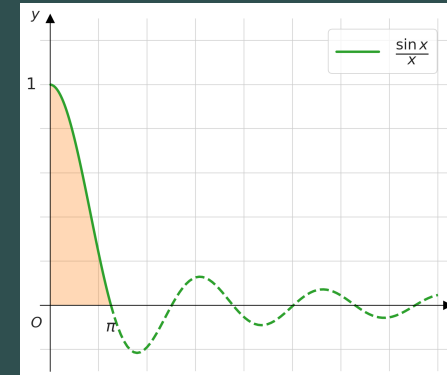
# Esempio 1

Studiare la convergenza di  $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

## Soluzione

Sia  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Si ha

- $f$  è continua in  $x \in (0, \pi]$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$
- è una funzione prolungabile con continuità in  $x = 0$



Le ipotesi del teorema sono verificate per cui possiamo concludere che l'integrale è convergente

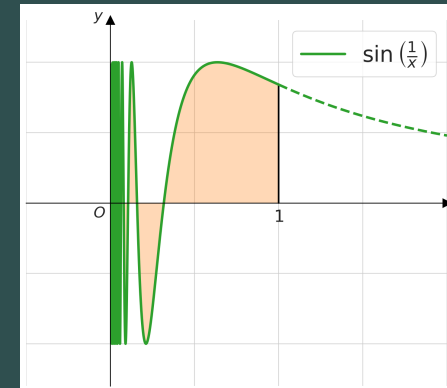
# Esempio 2

Studiare la convergenza di  $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

## Soluzione

Sia  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . Si ha

- $f$  è continua in  $x \in (0, 1]$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in [-1, 1]$  e quindi limitato



Le ipotesi del teorema sono verificate per cui possiamo concludere che l'integrale è convergente

# Esempio 3

Studiare la convergenza di  $\int_0^1 \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$

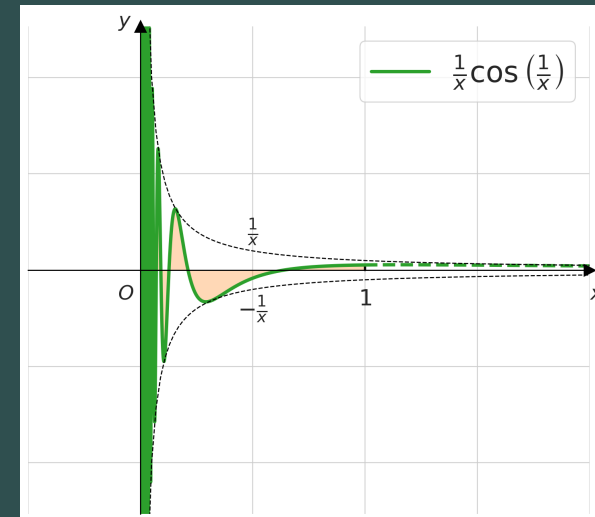
## Soluzione

Sia  $f(x) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ . Si ha

- $f$  è continua in  $x \in (0, 1]$
- non esiste  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Quindi non possiamo applicare il teorema precedente per dedurre che l'integrale è convergente

Dobbiamo procedere per altra via



# Esempio 3

Usando la definizione di integrale improprio, e integrando per parti con  $u = -x$  e  $v' = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ , si ha

$$\begin{aligned}\int_t^1 \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx &= \int_t^1 -x \left[ \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] dx = \left[ -x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right]_t^1 + \int_t^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \\ &= -\sin 1 + t \sin\left(\frac{1}{t}\right) + \int_t^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx\end{aligned}$$

Passando al limite per  $t \rightarrow 0^+$ , si ha

- $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0$
- dall'esempio 2 si ha che  $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$  è convergente

Quindi,  $\int_0^1 \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$  converge a:  $-\sin 1 + \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

# Esempio 4

Studiare la convergenza di  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$

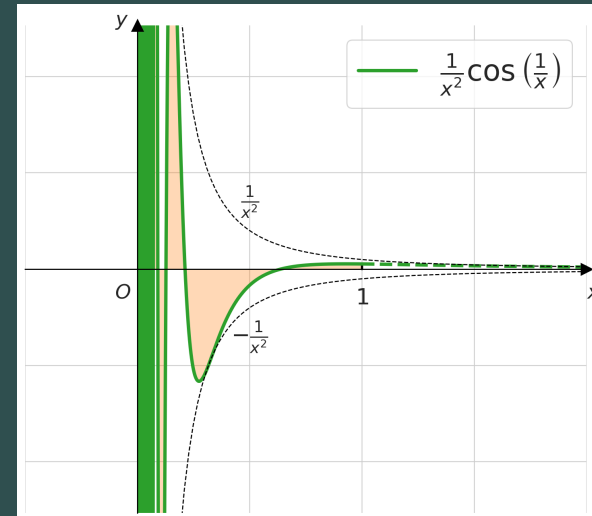
## Soluzione

Sia  $f(x) = \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ . Si ha

- $f$  è continua in  $x \in (0, 1]$
- non esiste  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

e quindi non possiamo applicare il teorema precedente per dedurre che l'integrale è convergente

Dobbiamo procedere per altra via



# Esempio 4

Usando la definizione di integrale improprio, e calcolando direttamente l'integrale si ha

$$\int_t^1 \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\left[\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]_t^1 = -\sin 1 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

Passando al limite per  $t \rightarrow 0^+$ , si ha

- $\sin\left(\frac{1}{t}\right)$  è indefinito

Quindi, l'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$  è indeterminato (cmq non convergente)

# Integrali fondamentali

# Teorema: convergenza degli infiniti fondamentali

Si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \alpha < 1 \\ \text{divergente} & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \begin{cases} [\ln x]_t^1 & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} [x^{1-\alpha}]_t^1 & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \begin{cases} -\ln t & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} (1 - t^{1-\alpha}) & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

# Integrale da destra e da sinistra

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Per dimostrarlo basta applicare la sostituzione

- $t = 1 - x \implies dt = -dx$
- se  $x = 0 \implies t = 1$
- se  $x = 1 \implies t = 0$

e invertire gli estremi di integrazione

# Integrale da destra e da sinistra (generico)

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx \sim \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx \sim \int_0^1 \frac{1}{(x-0)^\alpha} dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Questi integrali convergono se  $\alpha < 1$  e divergono se  $\alpha \geq 1$

A close-up profile of a dog's head, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue out. The image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the middle of the dog's face.

FINE