

Integrale improprio

Motivazione

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Integrale proprio / definito

Abbiamo visto

$$\int_a^b f(x) dx$$

con le ipotesi:

- $f(x)$  funzione continua e limitata
- $[a, b]$  intervallo chiuso e limitato

## Estensione della teoria (utile nelle applicazioni)

- funzioni continue non limitate su intervalli limitati
- intervalli non limitati

**Nota:** Negli esempi la funzione integranda è positiva, e quindi l'integrale improprio estende il concetto di area

# Domande fondamentali

1. L'integrale esiste / è convergente?

2. Si riesce a calcolarlo?

Il tipico esercizio d'esame è:

- Dire per quali valori del parametro  $\alpha$  è integrabile ... (si risolve con Taylor o maggiorazioni)
- Calcolarlo per  $\alpha = \dots$  (tecniche di integrazione)

# Esempio (funzione non limitata su intervallo limitato)

Studiare l'integrale di  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  per  $x \in (0, 1]$

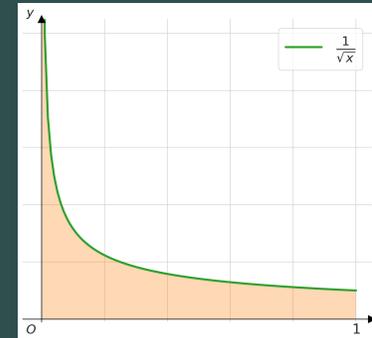
## Soluzione

Per  $x \rightarrow 0^+$  si ha  $f(x) \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2(\sqrt{1} - \sqrt{t}) = 2$$

Il limite esiste finito e vale 2

L'interpretazione grafica suggerisce di porre:  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$

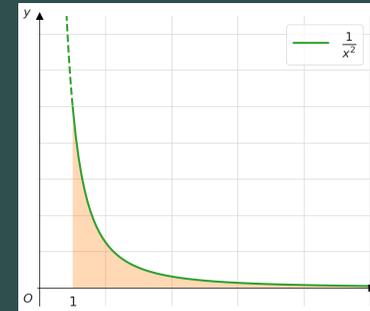


# Esempio (funzione su intervallo non limitato)

Studiare l'integrale di  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  per  $x \in [1, +\infty)$

## Soluzione

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{t} + \frac{1}{1} \right) = 1\end{aligned}$$



Il limite esiste finito e vale 1

L'interpretazione grafica suggerisce di porre:  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

# Osservazioni

## Idea (procedura di regolarizzazione)

Ridurre il dominio di integrazione a una regione limitata in modo che la funzione sia integrabile e poi passare al limite rispetto ai parametri del dominio

## Analogie con le serie numeriche

- stessa terminologia: converge / diverge / oscilla
- criteri di convergenza per stabilire se un'integrale improprio è convergente (senza calcolo della primitiva che peraltro potrebbe non esistere)

## Proprietà degli integrali impropri (stesse delle funzioni integrabili secondo Riemann)

- linearità / confronto / suddivisione / confronto con il modulo

A close-up profile of a dog's head, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue hanging out. The dog has white fur on its face and chest, with black and brown patches. The background is a grassy area. The entire image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the middle of the dog's face.

FINE