$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

Integrale definito difficile

(Integrale di M. Bertrand (1834) - J. Bertrand (1843) - J. A. Serret (1844)

Manolo Venturin

~~~ 21 ~~~

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio

> Calcolare
>
> $$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

Premessa

Se provo una integrazione per parti non ce la faccio perché

- $u' = \log(1+x) \implies u = (1+x)(\log(1+x) - 1)$
- $v = \frac{1}{1+x^2} \implies v' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio

> Calcolare
>
> $$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

Premessa

Oppure, se provo

- $u' = \frac{1}{1+x^2} \implies u = \arctan x$ (eventualmente il suo integrale da origine ancora ad una $\arctan$ e un $\log$)
- $v = \ln(1+x) \implies v' = \frac{1}{1+x}$

non ce la faccio

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio

> Calcolare
>
> $$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

Premessa

Quindi necessita di una oppurtuna sostituzione

Soluzione

1. Sostituzione di Serret
2. Sostituzione alternativa
3. Osservazione sulla soluzione alternativa

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio

Calcolare

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

Premessa

Quindi necessita di una oppurtuna sostituzione

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Sostituzione di Serret

Sostituzione di Serret

Sia $x = \tan t$ allora

- $dx = \sec^2 t\, dt = (1 + \tan^2 t)\, dt$
- per $x = 0$ si ha $0 = \tan t \implies t = 0$
- per $x = 1$ si ha $1 = \tan t \implies t = \frac{\pi}{4}$

e quindi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(1+\tan t)}{1+\tan^2 t} \cdot (1+\tan^2 t)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan t)\, dt \end{aligned}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Sostituzione di Serret

Proprietà degli integrali indefiniti

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

Infatti, se $y = a + b - x$ si ha

- $dy = -dx$
- per $x = a$ si ha $y = b$
- per $x = b$ si ha $y = a$

e quindi

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx \;=\; -\int_b^a f(y)\,dy \;=\; \int_a^b f(y)\,dy$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Sostituzione di Serret

Sfruttando il risultato precedente si ha

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1 + \tan t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) dt$$

Ora da

$$\tan\left(\alpha \pm \beta\right) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

si ha

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan t}{1 + \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan t} = \frac{1 - \tan t}{1 + \tan t}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Sostituzione di Serret

Sfruttando il risultato precedente si ha

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+\tan t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) dt$$

con

$$1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right) = 1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t} = \frac{2}{1+\tan t}$$

e

$$\log\left(\frac{2}{1+\tan t}\right) = \log 2 - \log\left(1+\tan t\right)$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Sostituzione di Serret

Ora

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+\tan t\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{2}{1+\tan t}\right) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+\tan t\right) dt \\
&= \left[\log\left(2\right)x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I \\
&= \frac{\pi}{4}\log\left(2\right) - I
\end{aligned}
$$

da cui

$$
2I = \frac{\pi}{4}\log\left(2\right) \implies I = \frac{\pi}{8}\log\left(2\right)
$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Sostituzione alternativa

Sostituzione alternativa

Per integrare

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

utilizziamo la sostituzione $x = \frac{1-t}{1+t}$ con $dx = -\frac{2}{(1+t)^2}$ e

- per $x = 0$ si ha $t = 1$
- per $x = 1$ si ha $1 = \frac{1-t}{1+t} \implies t = 0$

e quindi l'integrale diventa

$$I = \int_1^0 \frac{\log\left(1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)\right)}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}\cdot\left(-\frac{2}{(1+t)^2}\right)\,dx = \int_0^1 \frac{\log\left(\frac{2}{1+t}\right)}{1+t^2}\,dt$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Sostituzione alternativa

E quindi

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\log\left(\frac{2}{1+t}\right)}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{\log 2}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t^2}\,dt \\
&= \left[\log(2)\arctan t\right]_0^1 - I \\
&= \log(2)\arctan(1) - I = \frac{\pi}{4}\log(2) - I
\end{aligned}
$$

da cui

$$
2I = \frac{\pi}{4}\log(2) \implies I = \frac{\pi}{8}\log(2)
$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Osservazione importante

La sostituzione

$$x = \frac{1-t}{1+t}$$

con

$$dx = -\frac{2}{(1+t)^2}\,dt$$

è detta **sostituzione autosimilare** perché è uguale al proprio inverso, infatti

$$x = \frac{1-t}{1+t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \frac{1-x}{1+x}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Osservazione importante

$$x = \frac{1-t}{1+t} \quad , \quad dx = -\frac{2}{(1+t)^2}\,dt \quad , \quad t = \frac{1-x}{1+x}$$

Tale sostituzione di solito si applica quando

- gli estremi di integrazione sono 0 e 1, infatti
  - per $x = 0$ si ha $t = 1$
  - per $x = 1$ si ha $t = 0$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Osservazione importante

$$x = \frac{1-t}{1+t} \quad , \quad dx = -\frac{2}{(1+t)^2}\,dt \quad , \quad t = \frac{1-x}{1+x}$$

Tale sostituzione di solito si applica quando

- la funzione integranda contiene fattori del tipo x, $1-x$, $1+x$ e $1+x^2$ in quanto questi termini sono trasformati in prodotti e quozienti di espressioni della stessa espressione
  - $x \implies \frac{1-t}{1+t}$
  - $1-x \implies \frac{2t}{1+t}$
  - $1+x \implies \frac{2}{1+t}$
  - $1+x^2 \implies 2\frac{1+t^2}{(1+t)^2}$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Osservazione importante

$$x = \frac{1-t}{1+t} \quad , \quad dx = -\frac{2}{(1+t)^2}\, dt \quad , \quad t = \frac{1-x}{1+x}$$

Tale sostituzione di solito si applica quando

- la funzione integranda contiene fattori del tipo $\log(1+x)$, $\log(1+x^2)$, $\log(x)$ e $\log(1-x)$
  - $\log(x) \quad \Longrightarrow \quad \log\left(\frac{1-t}{1+t}\right) = \log(1-t) - \log(1+t)$
  - $\log(1-x) \quad \Longrightarrow \quad \log\left(\frac{2t}{1+t}\right) = \log(2) + \log(t) - \log(1+t)$
  - $\log(1+x) \quad \Longrightarrow \quad \log\left(\frac{2}{1+t}\right) = \log(2) - \log(1+t)$
  - $\log(1+x^2) \quad \Longrightarrow \quad \log\left(2\,\frac{1+t^2}{(1+t)^2}\right) = \log(2) + \log(1+t^2) - 2\log(1+t)$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Osservazione importante

Non è detto che la sostituzione funzioni sempre

Ad esempio

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$

diventa

$$\begin{aligned} I &= \int_1^0 \frac{\log(2) + \log\left(1+t^2\right) - 2\log(1+t)}{2\frac{(1+t^2)}{(1+t)^2}} \cdot \left(-\frac{2}{(1+t^2)}\right) dt \\ \cancel{I} &= \int_0^1 \frac{\log(2)}{1+t^2}\,dt + \cancel{\int_0^1 \frac{\log(1+t^2)}{1+t^2}\,dx} - 2\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t^2}\,dx \end{aligned}$$

Nota: Questo integrale si risolve per parti

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio bonus

> Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$

Soluzione

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

$$\text{(usando la sostituzione } t = \frac{1}{x}\text{, i.e. } x = \frac{1}{t} \text{ con } dx = -\frac{1}{t^2}\,dt \text{ si ha)}$$

$$= \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx + \int_1^0 \frac{\log(1+\frac{1}{x})}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{\log(1+x)-\log(x)}{1+x^2}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio bonus

Ora,

- $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log(2)$
- $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = -G$ (Catalan constant)

quindi si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx &= 2\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,dx \\
&= 2\frac{\pi}{8}\log(2) + G \\
&= \frac{\pi}{4}\log(2) + G
\end{aligned}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)