Calcolo delle aree
Esercizi 1

(Integrale definito) Calcolo integrale

Manolo Venturin

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esercizi

1. Calcolare l'area delimitata dalle parabole: $y_1 = -x^2 + 6x - 3$ e $y_2 = x^2 - 2x - 3$
2. Calcolare l'area delimitata dalle parabole: $y_1 = -x^2 + 6x - 3$ e $y_2 = x^2 - 2x - 3$ e sopra l'asse x
3. Calcolare l'area della parabola $y = x^2 - 2x$ delimitata tra le sue radici (zeri)
4. Calcolare l'area delimitata dalla funzione $y = \ln x$, l'asse x e la retta $x = e$
5. Calcolare l'area delimitata dalla funzione $y = xe^{-x}$, l'asse x e le rette $x = \pm 1$
6. Calcolare l'area delimitata dalle funzioni: $y_1 = 2x^3$ e $y_2 = -x(x-2)(x+2)$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Soluzione

Esercizio 1

> Calcolare l'area delimitata dalle parabole:
>
> $$\begin{aligned} y_1 &= -x^2 + 6x - 3 \\ y_2 &= x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

Soluzione

La soluzione prevede i seguenti passi:

- determinazione dell'intersezione delle due parabole
- individuazione dell'area da calcolare
- individuazione della posizione delle due curve (quale curva sta sopra un'altra)
- calcolo dell'area

Esercizio 1

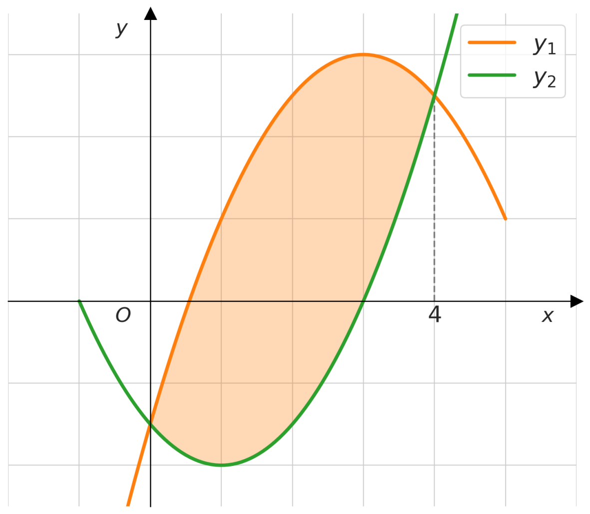
I punti di intersezione si determinano risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y &= -x^2 + 6x - 3 \quad (= y_1) \\ y &= x^2 - 2x - 3 \quad (= y_2) \end{cases}$$

cioè

$$-x^2 + 6x - 3 = x^2 - 2x - 3 \implies 2x^2 - 8x = 0 \implies 2x(x-4) = 0 \implies x_{1,2} = \{0,\ 4\}$$

L'individuazione della posizione delle due funzioni si ottiene facilmente dal coefficiente a del termine di secondo grado, e y_1 è concava verso il basso, mentre y_2 è concava verso l'alto



Esercizio 1

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^4 [y_1 - y_2]\, dx \\
&= \int_0^4 \left[-x^2 + 6x - 3 - \left(x^2 - 2x - 3\right)\right]\, dx \\
&= \int_0^4 \left(-2x^2 + 8x\right)\, dx \\
&= \left[-2\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \left[2x^2\left(-\frac{x}{3} + 2\right)\right]_0^4 \\
&= 2 \cdot 16 \cdot \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{3}
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

> Calcolare l’area delimitata dalle parabole:
>
> $$\begin{aligned} y_1 &= -x^2 + 6x - 3 \\ y_2 &= x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$
>
> e sopra l’asse delle x

Soluzione

Dall’esericizo precedente abbiamo che i punti di intersezione delle due parabole sono $\{0,\ 4\}$

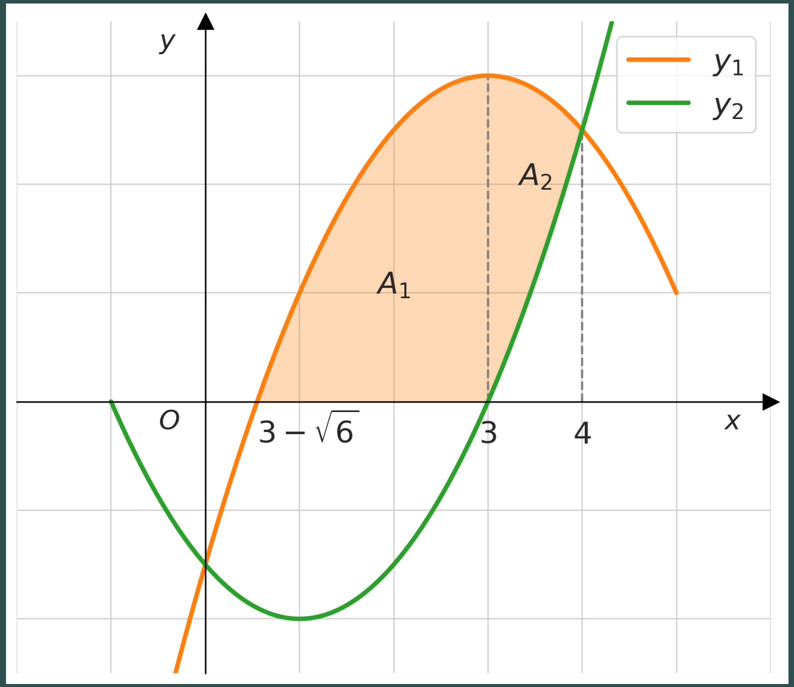
Individuiamo i punti di intersezione delle due parabole con l’asse x

$$-x^2 + 6x - 3 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-3}}{-1} = \{3+\sqrt{6},\ 3-\sqrt{6}\}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{1} = \{3,\ -1\}$$

Esercizio 2

Procediamo con il disegno



L'area della figura incognita è data dalla somma delle seguenti due aree

- A_1 da $3 - \sqrt{6}$ a 3 di y_1
- A_2 da 3 a 4 di $y_1 - y_2$

Esercizio 2

$$
\begin{aligned}
A = \; A_1 + A_2 \; &= \int_{3-\sqrt{6}}^{3} y_1 \, dx + \int_3^4 [y_1 - y_2] \, dx \\
&= \int_{3-\sqrt{6}}^{3} -x^2 + 6x - 3 \, dx + \int_3^4 \left(-2x^2 + 8x\right) \, dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{3-\sqrt{6}}^{3} + \left[-2\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2}\right]_3^4 \\
&= [9 - (9 - 4\sqrt{6})] + \left[2 \cdot 16 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot 9\right] \\
&= 4\sqrt{6} + \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

> Calcolare l'area della parabola
>
> $$y = x^2 - 2x$$
>
> delimitata tra le sue radici (zeri)

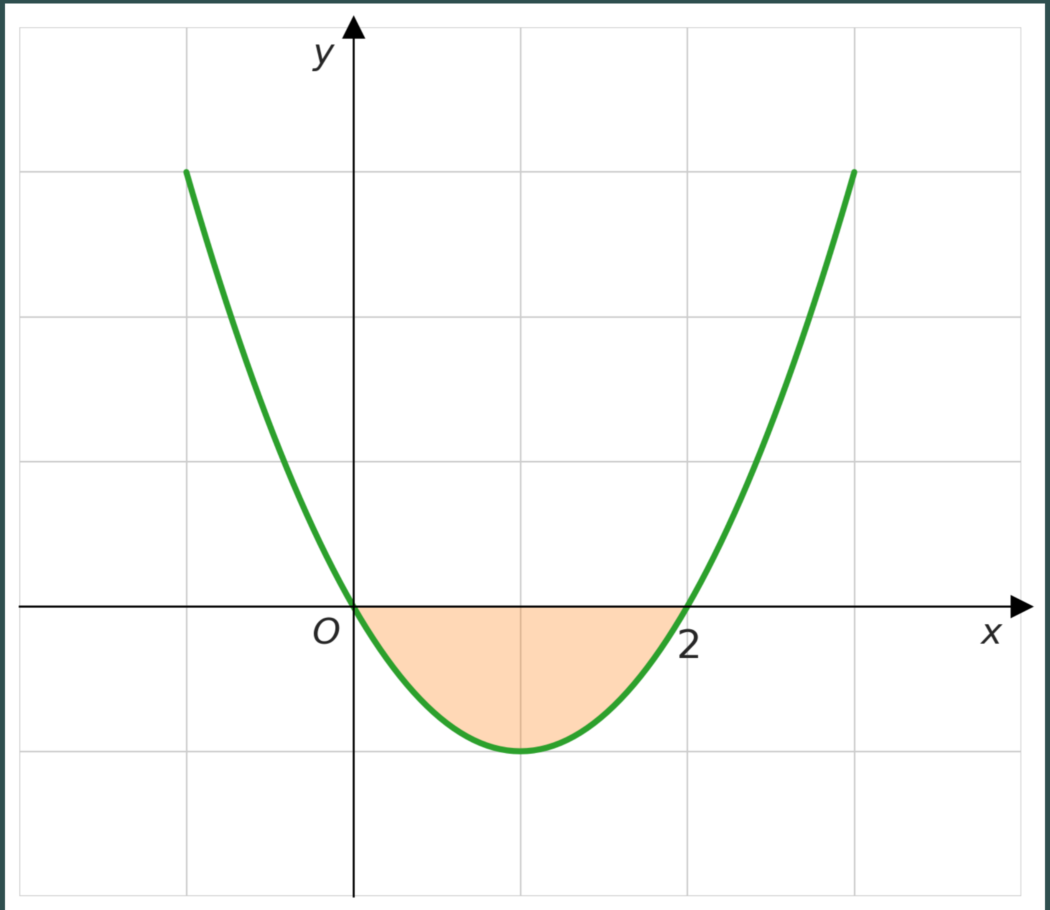
Soluzione

Calcoliamo le radice

$$x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0 \implies x_{1,2} = \{0,\ 2\}$$

Esercizio 3

Procediamo con il disegno



Nota: Osserviamo che la funzione che “sta sopra” è la retta costante $y = 0$

Esercizio 3

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 \left[0 - \left(x^2 - 2x\right)\right] dx \\
&= \int_0^2 \left(2x - x^2\right)\, dx \\
&= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\
&= \left(4 - \frac{8}{3}\right) - (0) \;=\; \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

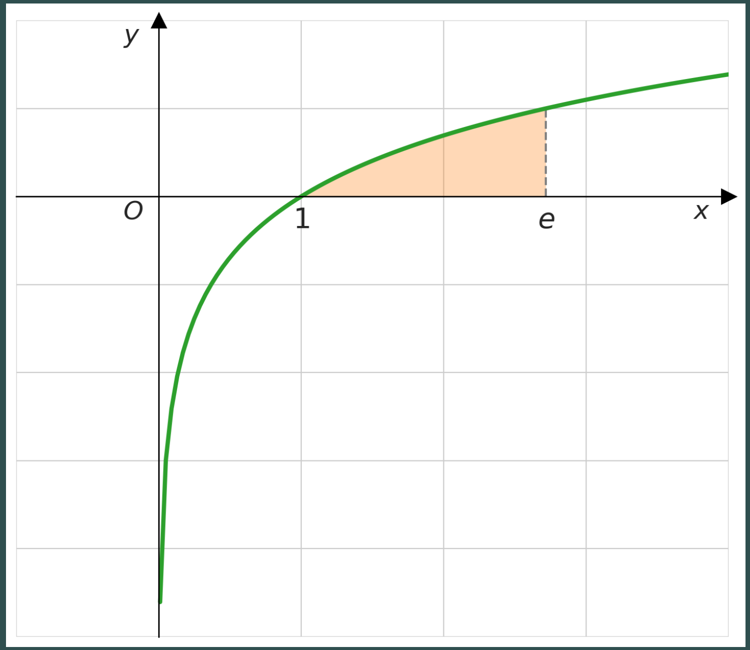
Esercizio 4

> Calcolare l'area delimitata dalla funzione $y = \ln x$, l'asse x e la retta $x = e$

Soluzione

Individuiamo l'intersezione della funzione $y = \ln x$ con l'asse x ($y = 0$), i.e.

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = 0 \end{cases} \implies \ln x = 0 \implies x = 1$$



Esercizio 4

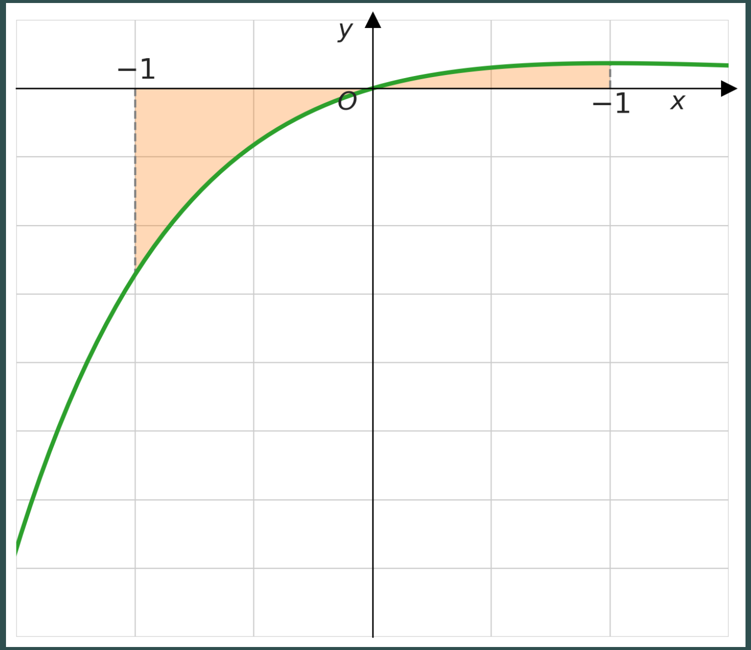
$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^e \ln x \, dx \\
&= \begin{pmatrix} u = \ln x, & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1, & v = x \end{pmatrix} \\
&= [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx \\
&= [x \ln x - x]_1^e \\
&= (e - e) - (0 - 1) \; = \; 1
\end{aligned}
$$

Esercizio 5

> Calcolare l'area delimitata dalla funzione $y = xe^{-x}$, l'asse x e le rette $x = \pm 1$

Soluzione

Procediamo con un disegno sommario della funzione.



L'intersezione della funzione $y = xe^{-x}$ con l'asse x avviene solo in $x = 0$

Questo divide l'area in due parti:

- negativa a sinistra dello zero
- positiva a destra dello zero

Esercizio 5

Premessa

Calcoliamo la primitiva di xe^{-x}

$$\int xe^{-x}\,dx \;=\; \begin{pmatrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = e^{-x}, & v = -e^{-x} \end{pmatrix} \;=\; -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx \;=\; -(x+1)e^{-x}$$

Area

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^{1} \left|-xe^{-x}\right| dx \;&=\; \int_{-1}^{0} -xe^{-x}\,dx + \int_{0}^{1} xe^{-x}\,dx \\ &=\; -\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx + \int_{0}^{1} xe^{-x}\,dx \\ &=\; -\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \left[-(x+1)e^{-x}\right]_{0}^{1} \\ &=\; -(-1) + (0) + \left(-2e^{-1}\right) - (-1) \;=\; 1 + 0 - 2e^{-1} + 1 \;=\; 2 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

Esercizio 6

> Calcolare l'area delimitata dalle funzioni:
>
> $$\begin{aligned} y_1 &= 2x^3 \\ y_2 &= -x(x-2)(x+2) = -x^3 - x^2 + 2x \end{aligned}$$

Soluzione

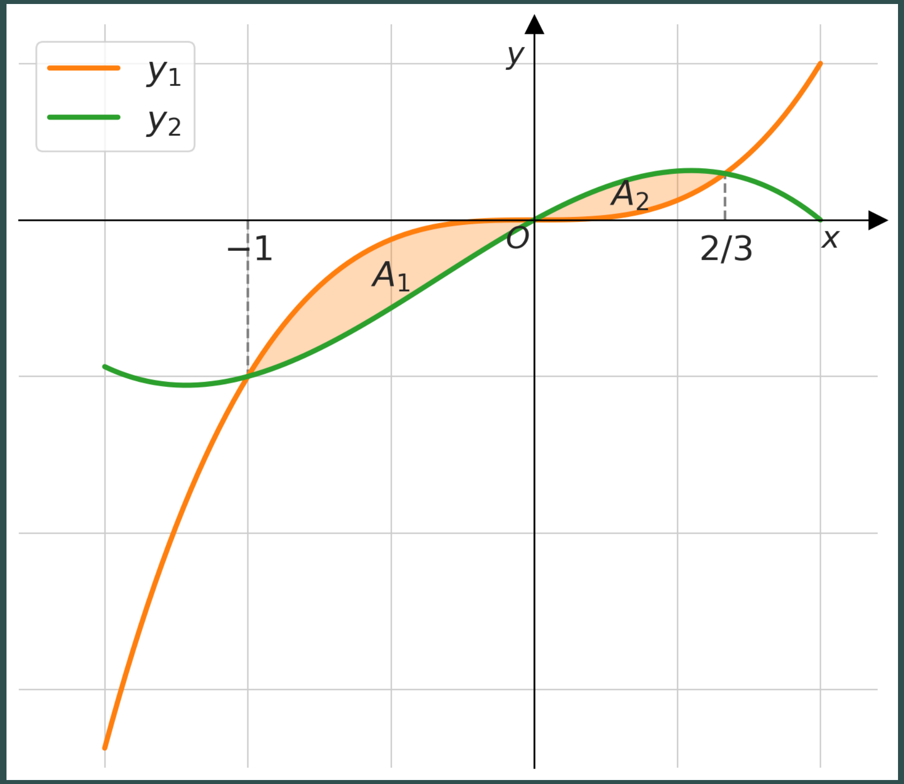
Troviamo i punti di intersezione e disegniamo le funzioni

$$2x^3 = -x^3 - x^2 + 2x \implies x\left(3x^2 + x - 2\right) = 0$$

cioè

- $x = 0$
- $3x^2 + x - 2 = \implies x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \left\{-1,\ \frac{2}{3}\right\}$

Esercizio 6



Dalla figura emerge che l'area si scrive come somma di dure aree distinte:

- A_1 per $x \in [-1, 0]$ dove $y_1 \geqslant y_2$
- A_2 per $x \in [0, 2/3]$ dove $y_2 \geqslant y_1$

Esercizio 6

$$
\begin{aligned}
A \;=\; A_1 + A_2 &= \int_{-1}^{0} \left[2x^3 - (-x^3 - x^2 + 2x)\right]\, dx \\
&\quad + \int_{0}^{2/3} \left[-x^3 - x^2 + 2x - (2x^3)\right]\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(3x^3 + x^2 - 2x\right)\, dx + \int_{0}^{2/3} \left(-3x^3 - x^2 + 2x\right)\, dx \\
&= \left[3\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-3\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{0}^{2/3} \\
&= \left[0 - \left(\frac{7}{12}\right)\right] + \left[\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}\right) - 0\right] \\
&= \frac{7}{12} + \frac{16}{81} \;=\; \frac{7\cdot 27 + 16\cdot 4}{4\cdot 9\cdot 9} \;=\; \frac{253}{324}
\end{aligned}
$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)