Calcolo integrali definiti Esercizio #2

(Integrale definito) Calcolo integrale

Manolo Venturin

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esercizi

Calcolare

1. $\int_{-1}^{1} (x + |x|) \, dx = [1]$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 6 \cos x + 9} \, dx = \left[\frac{1}{6}\right]$
3. $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx = [\pi]$
4. $5 \int_0^{\pi} e^{2x} \sin x \, dx = \left[e^{2\pi} + 1\right]$
5. $\int_1^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) dx = \left[2 \ln(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{3}\right]$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan x} \, dx = \left[\frac{1}{8}(\pi + \ln 4)\right]$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 - \sin x} \, dx = \left[1 + \sqrt{3}\right]$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Soluzione

Esercizio 1

> Calcolare $I = \int_{-1}^{1} (x + |x|)\, dx$

Soluzione

Ricordando la definizione di valore assoluto si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{0} (x - x)\, dx + \int_{0}^{1} (x + x)\, dx \\ &= 0 + \int_{0}^{1} (x + x)\, dx \\ &= \left[x^2\right]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Esercizio 2

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 6\cos x + 9}\, dx$

Soluzione

Essendo una funzione razionale nel coseno con la derivata a numeratore, poniamo

- $u = \cos x$ con $du = -\sin x\, dx$
- per $x = 0$ si ha $u = \cos 0 = 1$ e per $x = \frac{\pi}{2}$ si ha $u = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

e quindi

$$I = -\int_1^0 \frac{1}{u^2 - 6u + 9}\, du = \int_0^1 \frac{1}{u^2 - 6u + 9}\, du = \int_0^1 \frac{1}{(u-3)^2}\, du$$
$$= \left[\frac{(u-3)^{-1}}{-1}\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{u-3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 3

> Calcolare $I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Soluzione

Applichiamo la sostituzione trigonometrica $x = 2\sin u$ con $dx = 2\cos u\,du$ e

- $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 u} = 2\cos u$
- per $x = 0$ si ha $2\sin u = 0 \implies u = 0$
- per $x = 2$ si ha $2\sin u = 2 \implies \sin u = 1 \implies u = \frac{\pi}{2}$

Quindi

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos u \cdot 2\cos u\,du = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2u))\,du \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u)2\,du = \left[2u+\sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

> Calcolare $\quad I = 5\int_0^{\pi} e^{2x}\sin x\,dx$

Soluzione

Calcoliamo la primitiva eseguendo due volte l'integrazione per parti

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = \begin{pmatrix} u = \sin x, & u' = \cos x \\ v' = e^{2x}, & v = \frac{e^{2x}}{2} \end{pmatrix} = \frac{e^{2x}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx$$

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \begin{pmatrix} u = \cos x, & u' = -\sin x \\ v' = e^{2x}, & v = \frac{e^{2x}}{2} \end{pmatrix} = \frac{e^{2x}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,dx$$

Esercizio 4

Quindi,

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin x\,dx &= \frac{e^{2x}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx\\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x - \frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx\end{aligned}$$

da cui

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{4}e^{2x}\left(2\sin x - \cos x\right)$$

cioé

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = \frac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin x - \cos x\right)$$

Esercizio 4

Quindi si ha

$$\begin{aligned} I = &\ 5\int_0^{\pi} e^{2x}\sin x\,dx \\ = &\ 5\left[\frac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin x - \cos x\right)\right]_0^{\pi} \\ = &\ \left[e^{2x}\left(2\sin x - \cos x\right)\right]_0^{\pi} \\ = &\ e^{2\pi}+1 \end{aligned}$$

Esercizio 5

> Calcolare $I = \int_1^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) dx$

Soluzione

Integriamo per parti con

- $u = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ e

$$u' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

- $v' = 1$ e $v = x$

Esercizio 5

Quindi

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 1 \cdot \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) dx \\ &= \left[x \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx \right]_1^2 \\ &= \left[x \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx \right]_1^2 \\ &= \left[x \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \frac{1}{2} \frac{\left(x^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^2 \\ &= 2 \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Esercizio 6

> Calcolare $\quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan x}\, dx$

Soluzione

Eseguiamo la sostituzione $u = \tan x$ con $du = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$

Ora, da

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Longrightarrow \quad \cos^2 x \left(\tan^2 x + 1\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

si ha

$$du = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx \quad \Longrightarrow \quad du = (1 + \tan^2 x)\, dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1+u^2}\, du = dx$$

Esercizio 6

$$u = \tan x \quad , \quad \frac{1}{1+u^2}\,du = dx$$

Per $x = 0$ si ha $u = \tan 0 = 0$ e per $x = \frac{\pi}{4}$ si ha $u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

Quindi, l'integrale diventa

$$\begin{aligned}
I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan x}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+u}\cdot\frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u-1}{1+u^2}\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+u}\,du \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2u}{1+u^2}\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+u}\,du \\
&= \left[-\frac{1}{4}\ln\left(1+u^2\right) + \frac{1}{2}\arctan u + \frac{1}{2}\ln|1+u|\right]_0^1
\end{aligned}$$

Esercizio 6

La soluzione finale è

$$
\begin{aligned}
I &= \left[-\frac{1}{4}\ln\left(1+u^2\right)+\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{2}\ln|1+u|\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{4}\ln 2+\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\ln 2 \\
&= \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2 \\
&= \frac{1}{8}\left(\pi+\ln 4\right)
\end{aligned}
$$

Esercizio 7

> Calcolare $\quad I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin x}\, dx$

Soluzione

Eseguiamo la sostituzione della tangente $t = \tan\frac{x}{2}$ con

- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$
- per $x = 0$ si ha $t = \tan 0 = 0$
- per $x = \frac{\pi}{3}$ si ha $t = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Esercizio 7

L'integrale diventa

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{1+t^2-2t}\,dt \;=\; 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{(t-1)^2}\,dt \\
&= \left[2\frac{(t-1)^{-1}}{-1}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \;=\; \left[-\frac{2}{t-1}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= -\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}-1} + \frac{2}{0-1} \;=\; -2\left(\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}+1\right) \;=\; -2\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}}\right) \\
&= -2\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \;=\; -2\frac{1+\sqrt{3}}{-2} \;=\; 1+\sqrt{3}
\end{aligned}
$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)