Calcolo integrali definiti Esercizio #1

(Integrale definito) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 21 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esercizi

Calcolare

1. $\int \sin\left(5x+1\right)dx$ $\qquad = \left[\arctan\left(\frac{e-1}{2}\right)\right]$
2. $\int_{-\frac{15}{16}}^{-\frac{3}{4}} \frac{3x+6\sqrt{x+1}+2}{(x\sqrt{x+1}+3x)\sqrt{x+1}}\,dx$ $\qquad = \left[2\ln\frac{56}{65}\right]$
3. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x|\sin x|\,dx$ $\qquad = [2\pi]$
4. $\int_0^{2\pi} |x-\pi|\sin^2 x\,dx$ $\qquad = \left[\frac{\pi^2}{2}\right]$
5. $4\int_{\frac{1}{e}}^{e} |x\ln x|\,dx$ $\qquad = \left[2-\frac{3}{e^2}+e^2\right]$
6. $\int_{-1}^{1} x^2\arctan x\,dx$ $\qquad = [0]$
7. $\int_{-1}^{1} x^2|\arctan x|\,dx$ $\qquad = \left[\frac{1}{6}\left(\pi-2+\log 4\right)\right]$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Soluzione

Esercizio 1

> Calcolare $I = \int_0^1 \frac{2e^x}{e^{2x} - 2e^x + 5}\, dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{2e^x}{e^{2x} - 2e^x + 5}\, dx \\
&= \left(u = e^x,\ du = e^x\, dx,\ x = 0 \implies u = 1,\ x = 1 \implies u = e \right) = \int_1^e \frac{2}{u^2 - 2u + 5}\, du \\
&= 2 \int_1^e \frac{1}{4 + (u-1)^2}\, du = \frac{2}{4} \cdot 2 \int_1^e \frac{1}{1 + \left(\frac{u-1}{2}\right)^2} \frac{1}{2}\, du \\
&= \left[\arctan\left(\frac{u-1}{2}\right) \right]_1^e = \arctan\left(\frac{e-1}{2}\right) - \arctan(0) = \arctan\left(\frac{e-1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

> Calcolare $\quad I = \int_{-\frac{15}{16}}^{-\frac{3}{4}} \frac{3x + 6\sqrt{x+1} + 2}{(x\sqrt{x+1} + 3x)\sqrt{x+1}}\, dx$

Soluzione

Poniamo $\sqrt{x+1} = u$ da cui

- $x + 1 = u^2 \quad \Longrightarrow \quad x = u^2 - 1$
- $dx = 2u\, du$
- per $x = -\frac{15}{16}$ si ha $u = \sqrt{-\frac{15}{16} + 1} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$
- per $x = -\frac{3}{4}$ si ha $u = \sqrt{-\frac{3}{4} + 1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Esercizio 2

$$I = \int_{-\frac{15}{16}}^{-\frac{3}{4}} \frac{3x + 6\sqrt{x+1} + 2}{(x\sqrt{x+1} + 3x)\sqrt{x+1}}\, dx \quad , \quad \sqrt{x+1} = u \quad , \quad x = u^2 - 1 \quad , \quad dx = 2u\, du$$

$$\left[-\frac{15}{16}, -\frac{3}{4}\right] \implies \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{3(u^2-1) + 6u + 2}{((u^2-1)u + 3(u^2-1)) \cdot u} \cdot 2u\, du \\ &= 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{3u^2 + 6u - 1}{u^3 + 3u^2 - u - 3}\, du = 2 \cdot \left[\ln\left|u^3 + 3u^2 - u - 3\right|\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \cdot \left(\ln\left|\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - 3\right| - \ln\left|\frac{1}{64} + \frac{3}{16} - \frac{1}{4} - 3\right|\right) \\ &= 2 \cdot \left(\ln\left|-\frac{21}{8}\right| - \ln\left|-\frac{195}{64}\right|\right) = 2 \ln \frac{56}{65} \end{aligned}$$

Esercizio 3

> Calcolare $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x|\sin x|\,dx$

Soluzione

Il $\sin x$ è

- positivo nell'intervallo $[0,\ \pi]$
- negativo nell'intervallo $[\pi,\ 2\pi]$

Quindi

$$\begin{aligned} I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x|\sin x|\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} x(-\sin x)\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin x\,dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} x\sin x\,dx \end{aligned}$$

Esercizio 3

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x \, dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin x \, dx$$

Ora

$$\int x \sin x = \begin{pmatrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = \sin x, & v = -\cos x \end{pmatrix} = -x \cos x + \int \cos x = -x \cos x + \sin x$$

per cui

$$\begin{aligned} I &= [-x \cos x + \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - [-x \cos x + \sin x]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= (\pi - 1) - (-1 - \pi) = 2\pi \end{aligned}$$

Esercizio 4

> Calcolare $\quad I = \int_0^{2\pi} |x-\pi| \sin^2 x \, dx$

Soluzione

Esplicitando il valore assoluto si ha

$$I = \int_0^{2\pi} |x-\pi| \sin^2 x \, dx \;=\; -\int_0^{\pi} (x-\pi) \sin^2 x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (x-\pi) \sin^2 x \, dx$$

Rimane da calcolare la primitiva di

$$\int (x-\pi) \sin^2 x \, dx \;=\; \underbrace{\int x \sin^2 x \, dx}_{I_A} - \pi \underbrace{\int \sin^2 x \, dx}_{I_B} \;=\; I_A - \pi \cdot I_B$$

Esercizio 4

Calcoliamo prima I_B e poi I_A sfruttando il risultato di I_B

$$
\begin{aligned}
I_B &= \int \sin^2 x \, dx \;=\; \frac{1}{2}\int \left(1-\cos\left(2x\right)\right)\, dx \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos\left(2x\right) dx \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos\left(2x\right) 2 \, dx \;=\; \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin\left(2x\right) \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot 2\sin x \cos x \\
&= \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right)
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

$$I_B = \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right)$$

Calcoliamo prima I_B e poi I_A sfruttando il risultato di I_B

$$\begin{aligned}
I_A = \int x \sin^2 x \, dx &= \begin{pmatrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = \sin^2 x, & v = \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right) \end{pmatrix} \\
&= x\left(\frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right)\right) - \int \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right) \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x \sin x \cos x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\int \sin x \cos x \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x \sin x \cos x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\sin^2 x \\
&= \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin x \cos x}{2} + \frac{1}{4}\sin^2 x
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Pertanto la primitiva è

$$I_P = \int (x-\pi)\sin^2 x\,dx = I_A - \pi \cdot I_B = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin x\cos x}{2} + \frac{1}{4}\sin^2 x - \frac{\pi}{2}(x - \sin x\cos x)$$

e la soluzione è

$$\begin{aligned} I = &-\int_0^{\pi}(x-\pi)\sin^2 x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(x-\pi)\sin^2 x\,dx = -[I_P]_0^{\pi} + [I_P]_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{2}\right) + \left(\frac{4\pi^2}{4} - \frac{2\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{2}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 5

> Calcolare $\quad I = 4\int_{\frac{1}{e}}^{e} |x \ln x| \, dx$

Soluzione

Per esplicitare il modulo osserviamo che

- l'unico zero di $x \ln x$ è $x = 1$
- $\ln x < 0$ per $x < 1$
- $\ln x > 0$ per $x > 1$
- $x > 0$ per ogni x

quindi si ha

$$I = 4\int_{\frac{1}{e}}^{e} |x \ln x| \, dx = -4\int_{\frac{1}{e}}^{1} x \ln x \, dx + 4\int_{1}^{e} x \ln x \, dx$$

Esercizio 5

$$I_P = \int x \ln x \, dx \; = \begin{pmatrix} u = \ln x, & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x, & v = \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx \; = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$

$$= \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1)$$

Pertanto

$$I = \; -4[I_P]_{\frac{1}{e}}^{1} \; + 4[I_P]_1^e$$

$$= -\left(-1 + \frac{1}{e^2}(-2-1) \right) + \left(e^2 + 1 \right) \; = \; 2 - \frac{3}{e^2} + e^2$$

Esercizio 6

> Calcolare $I = \int_{-1}^{1} x^2 \arctan x \, dx$

Soluzione

La funzione è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto allo 0 e quindi l'integrale è pari a 0

Esercizio 7

> Calcolare $\quad I = \int_{-1}^{1} x^2 |\arctan x|\, dx$

Soluzione

Notando che la funzione è pari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto allo 0 l'integrale si semplifica in

$$I = \int_{-1}^{1} x^2 |\arctan x|\, dx = 2\int_{0}^{1} x^2 \arctan x\, dx = 2[I_P]_0^1$$

dove

$$I_P = \int x^2 \arctan x\, dx$$

è una primitiva dell'integranda

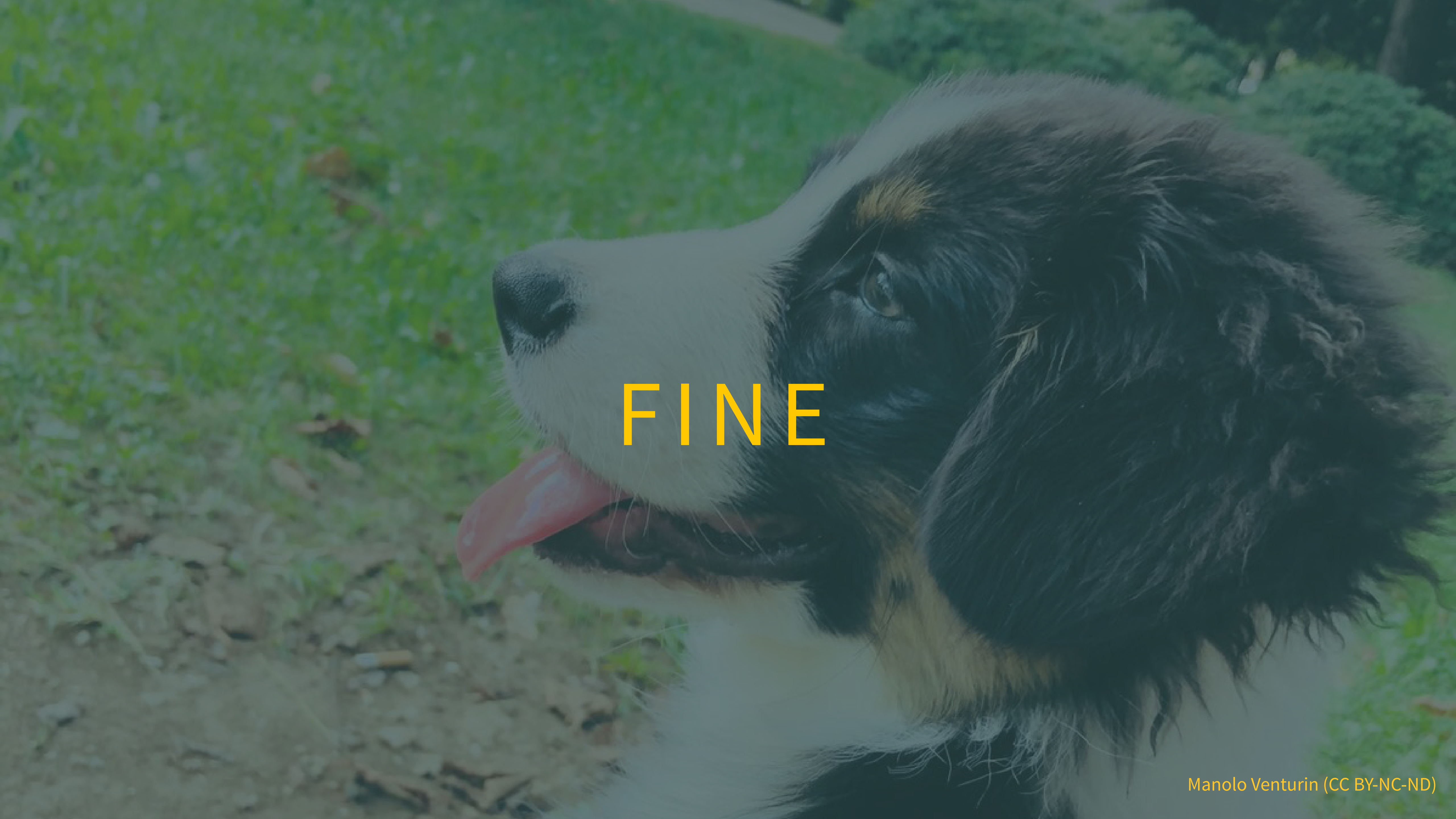
Esercizio 7

$$
\begin{aligned}
I_P &= \int x^2 \arctan x \, dx \\
&= \begin{pmatrix} u = \arctan x, & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = x^2, & v = \frac{x^3}{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{x^3}{3} \arctan x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x(x^2+1-1)}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int x \, dx + \frac{1}{6} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \log\left(1+x^2\right)
\end{aligned}
$$

Esercizio 7

Il valore dell'integrale è

$$\begin{aligned} I &= 2\left[\frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1 \\ &= 2\left(\frac{1}{3}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\log 2 - 0\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(\pi - 2 + \log 4\right) \end{aligned}$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)