Integrale definito: Interpretazione geometrica e calcolo di aree

(Integrale definito) Calcolo integrale

Manolo Venturin

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

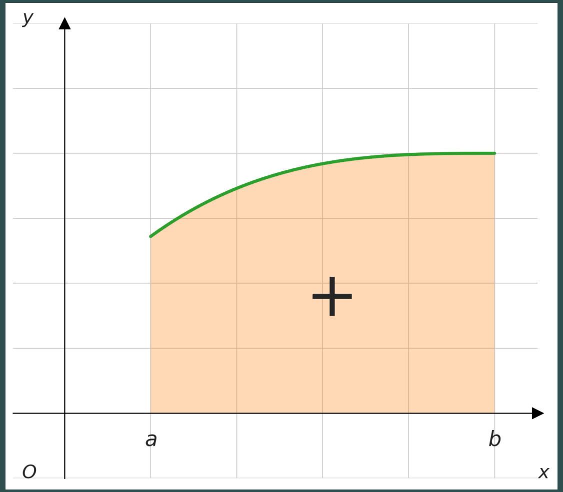
Interpretazione geometrica

Se f è una funzione positiva, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ si può interpretare come area compresa tra il grafico delle ascisse e il grafico di f (trapezoide)

Nota

Ricordando il rettangolo di approssimazione:

$$\begin{cases} \text{base} \geqslant 0 \\ \text{altezza} \geqslant 0 \end{cases} \implies \text{area} = \text{base} \cdot \text{altezza} \geqslant 0$$



Integrale come area se f è positiva

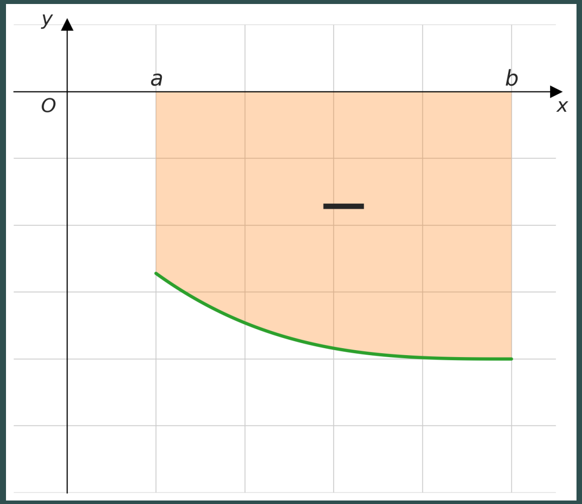
Interpretazione geometrica

Se f è una funzione negativa, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ si può interpretare come area compresa tra il grafico delle ascisse e il grafico di f, ma con il segno negativo

Nota

Ricordando il rettangolo di approssimazione:

$$\begin{cases} \text{base} \geqslant 0 \\ \text{altezza} \leqslant 0 \end{cases} \implies \quad \text{area} = \text{base} \cdot \text{altezza} \leqslant 0$$



Integrale come area se f è negativa

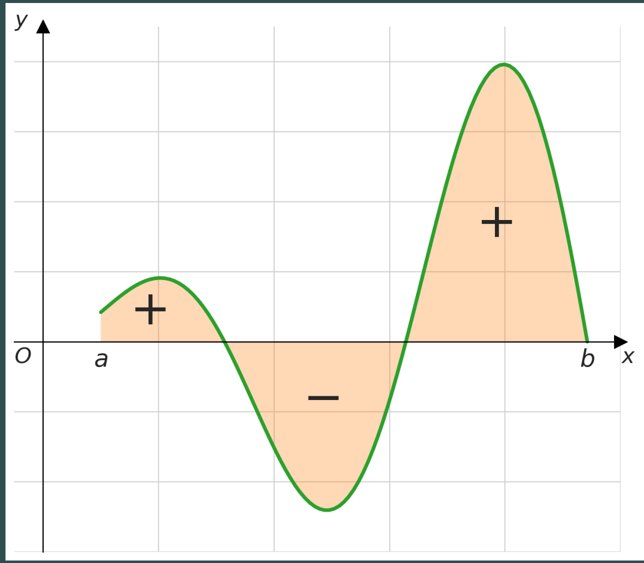
Interpretazione geometrica

Se f cambia segno, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ tiene conto di questo come somma di aree positive e negative

Nota

- Integrale = somma delle aree con segno da a a b

Quindi, se $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ non implica necessariamente che $f(x) = 0$

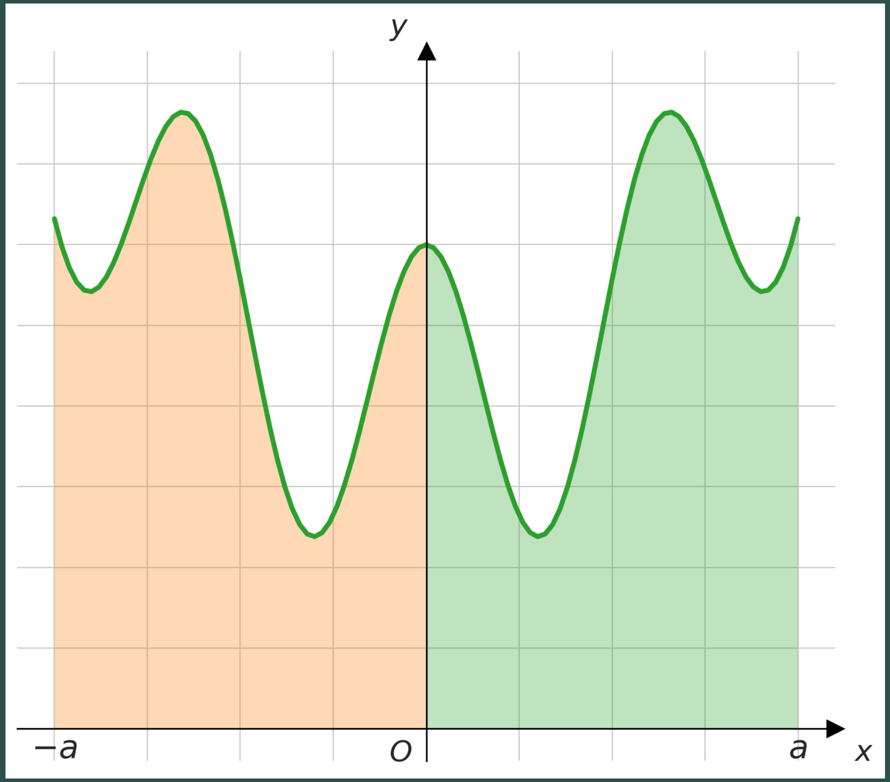


Integrale come somma delle aree con segno se f che cambia segno

Funzione con simmetria pari

Se f è una funzione pari $f(x) = f(-x)$, allora

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

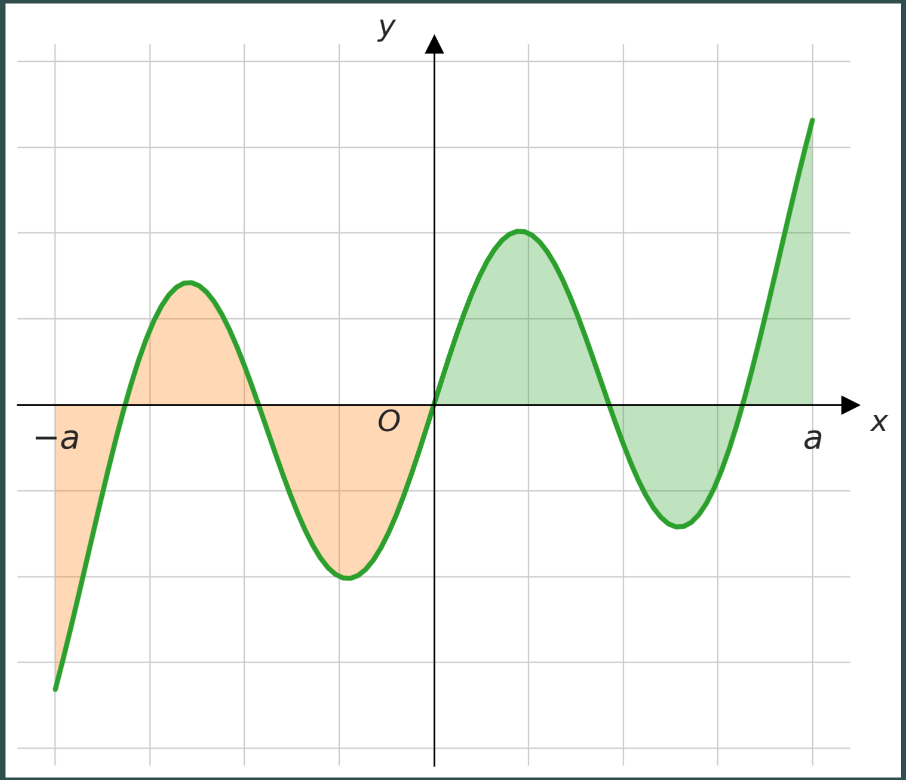


Integrale di una funzione pari

Funzione con simmetria dispari

Se f è una funzione dispari $f(x) = -f(-x)$, allora

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



Integrale di una funzione dispari

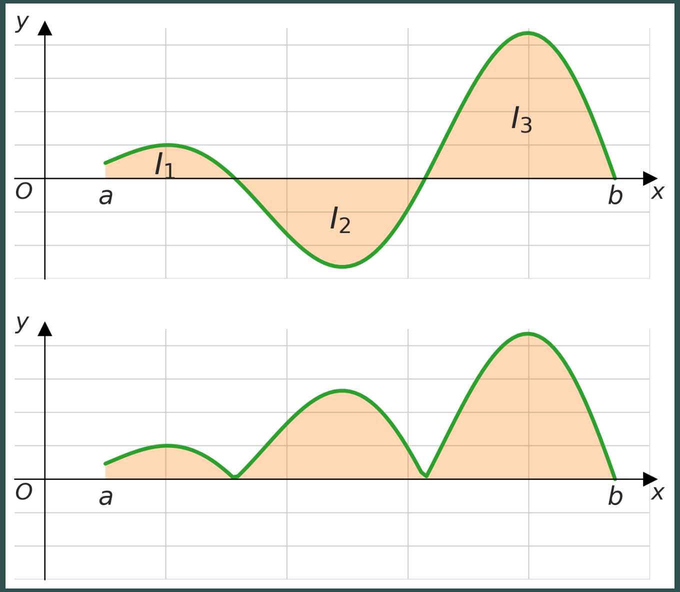
Area del trapezoide

L'area del trapezoide è $\text{Area} = \int_a^b |f(x)| \, dx$

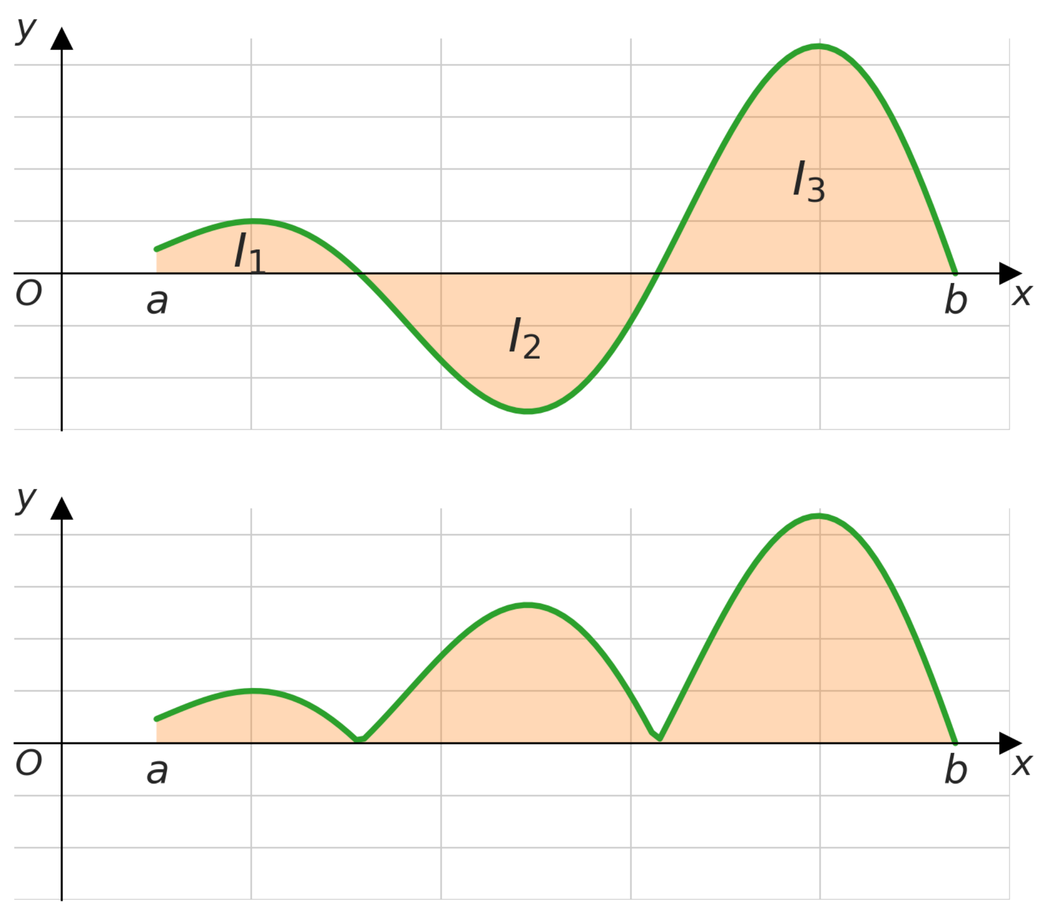
Esempio (di scomposizione)

Dall'esempio

$$\text{Area} = I_1 - I_2 + I_3$$



Area del trapezoide



Area del trapezoide

Operativamente

Bisogna esplicitare $|f(x)|$ in ogni suo intervallo dove cambia segno attraverso i suoi zeri

Area tra due curve

In generale, nei problemi dove è richiesto il calcolo dell'area di una figura piana delimitata da due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ questa si calcola come

$$I = \int_a^b |f(x) - g(x)| \; dx$$

Operativamente

- Disegnare le due funzioni f e g da a a b
- Individuare i punti di intersezione in $[a, b]$ delle due funzioni
- Individuare per ogni intervallo di intersezione quale funzione, tra f e g è maggiore in modo tale da esplicitare il valore assoluto

Esempio 1

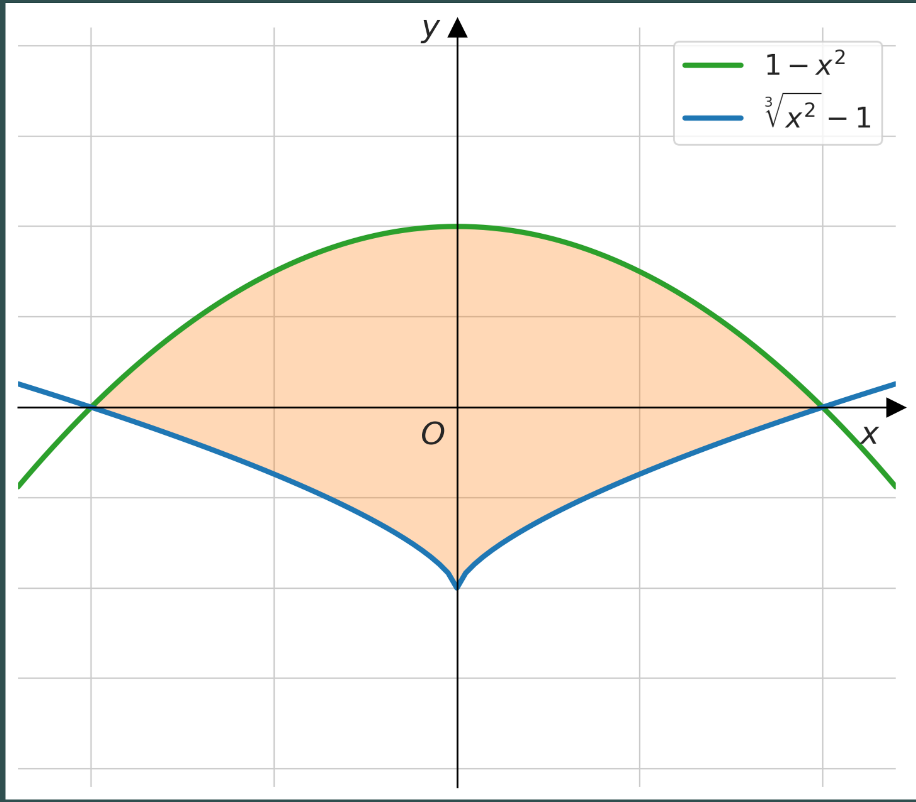
> Calcolare l'area della figura piana tra le curve $y = 1 - x^2$ e $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$

Soluzione

Per prima cosa disegniamo le due funzioni e determiniamo la x di intersezione risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = \sqrt[3]{x^2} - 1 \end{cases} \implies x = \pm 1$$

(la soluzione del sistema alla slide successiva)



Area tra le due funzioni

Esempio 1

Soluzione del sistema

Passi della soluzione:

- poniamo $t = x^2$
- isoliamo la radice cubica
- eleviamo al cubo
- fattorizziamo il polinomio

Si ha

$$\begin{cases} y = 1 - t \\ y = \sqrt[3]{t} - 1 \end{cases} \implies (2-t)^3 = t \implies -(t-1)(t^2 - 5t + 8) = 0$$

da cui

- $t = 1 \implies x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$
- $t^2 - 5t + 8 = 0$ non ha nessuna radice reale, $\Delta < 0$

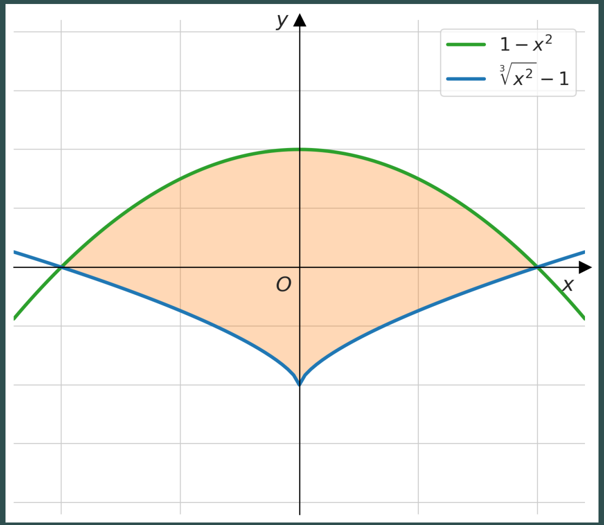
Esempio 1

Quindi, si ha

- gli estremi di integrazione sono $a = -1$ e $b = 1$
- dal grafico $1 - x^2$ è sempre maggiore di $\sqrt[3]{x^2} - 1$ e quindi la loro differenza

$$1 - x^2 - (\sqrt[3]{x^2} - 1) \; = \; 2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2} \geqslant 0$$

è sempre positiva nell'intervallo $[-1, 1]$



Area tra le due funzioni

Nota

Inoltre, si tratta di una figura piano simmetrica rispetto alla 0 (pari), quindi si ha

$$I = 2 \int_0^1 2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2} \; dx$$

Esempio 1

Calcolo dell'area

L'area della regione è

$$
\begin{aligned}
\frac{\text{Area}}{2} &= \int_0^1 2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2}\,dx \\
&= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \\
&= \frac{16}{15}
\end{aligned}
$$

da cui $\text{Area} = \frac{32}{15}$

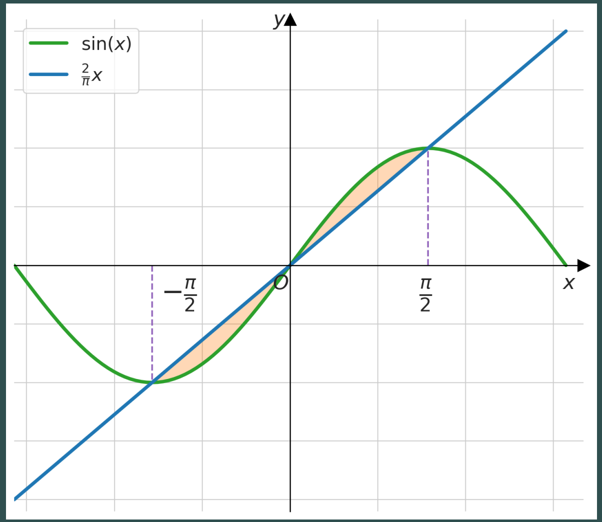
Esempio 2

> Calcolare l'area della figura piana tra le curve $y = \sin x$ e $y = \frac{2}{\pi}x$

Soluzione

Per prima cosa disegniamo le due funzioni e determiniamo la x di intersezione risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \dfrac{2}{\pi}x \end{cases} \implies x = \pm\frac{\pi}{2}$$



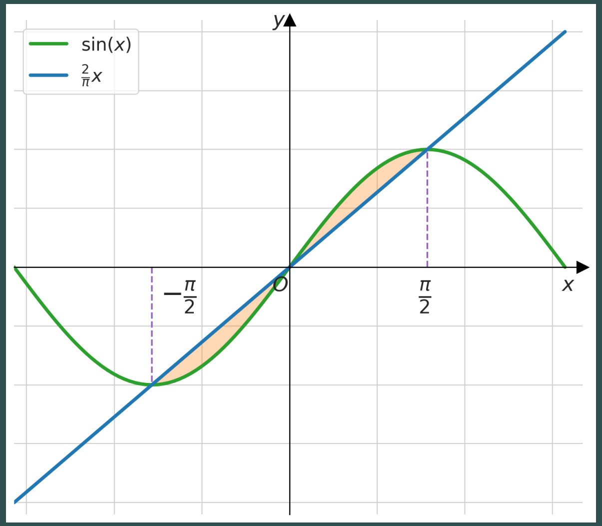
Area tra le due funzioni

Esempio 2

Il calcolo dell'area si semplifica se notiamo che $\sin x - x$ è una funzione dispari in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (non lo usiamo direttamente)

Notiamo che

- in $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ la funzione $\frac{2}{\pi}x$ è maggiore di $\sin x$
- in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione $\sin x$ è maggiore di $\frac{2}{\pi}x$



Area tra le due funzioni

Esempio 2

$$
\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (x - \sin x)\ dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - x)\ dx \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - x)\ dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - x)\ dx \\
&= 2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - x)\ dx \\
&= 2 \left[-\cos x - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 \left[-(0-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - 0 \right) \right] = 2 - \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}
$$

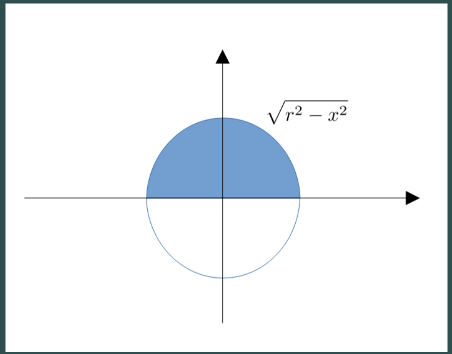
Esempio 3

> Dimostrare che l'area di un cerchio di raggio r vale $A = \pi r^2$

Soluzione

Centriamo il cerchio nell'origine degli assi

$$x^2 + y^2 = r^2$$



e consideriamo solo la parte superiore di equazione

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Quindi l'area del cerchio sarà il doppio dell'area individuata dalla funzione precedente

Esempio 3

L'area della curva $\sqrt{r^2 - x^2}$ è data da

$$
\begin{aligned}
A_{\text{sup}} &= \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\
&= 2 \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\
&(\text{cambio variabile } x = ru \text{ con } dx = r\, du) \\
&(\text{per } x = 0 \implies u = 0) \\
&(\text{per } x = r \implies u = 1) \\
&= 2 \int_{0}^{1} \sqrt{r^2 - r^2 u^2}\, r\, du \\
&= r^2 \cdot \underbrace{2 \int_{0}^{1} \sqrt{1 - u^2}\, du}_{I} = r^2 \cdot I
\end{aligned}
$$

Esempio 3

Calcoliamo

$$I = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,du$$

con la sostituzione trigonometrica

- $x = \sin u$
- $dx = \cos u\,du$
- per $x = 0$ si ha $0 = \sin u \implies u = 0$
- per $x = 1$ si ha $1 = \sin u \implies u = \frac{\pi}{2}$

Si ha

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du \;=\; \cancel{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos(2u)}{\cancel{2}}\right) du \;=\; \left[u + \frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{\pi}{2}$$

Esempio 3

L'area della regione superiore è

$$A_{\text{sup}} = r^2 \cdot I = r^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

e quindi l'area del cerchio sarà (il doppio)

$$A = 2 \cdot A_{\text{sup}} = 2r^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi r^2$$


FINE