Teoremi principali del calcolo integrale

(Integrale definito) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 21 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

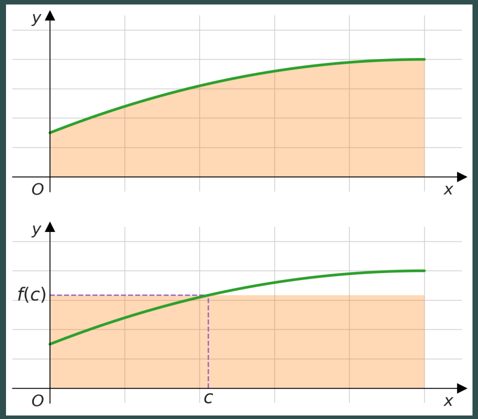
Teorema della media integrale

Teorema

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste un $c \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \qquad \text{(valor medio)}$$

Nota: $f(c)\cdot(b-a) = \text{Area del trapezoide se } f \text{ è positiva}$



Teorema della media integrale

Dimostrazione

Ricordiamo che, essendo f una funzione limitata si ha

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

dove $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ e $M = \sup_{[a,b]} f(x)$

Per il teorema di Weierstrass f ammette minimo e massimo in $[a,b]$ e quindi dividendo per $(b-a)$ si ha

$$m \leqslant \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{f(c)} \leqslant M$$

Teorema della media integrale

Ora

$$f(c) \in [m, M]$$

e per il **teorema dei valori intermedi** f (continua) deve assumere tutti i valori compresi tra $[a, b]$ e quindi esisterà un $c \in [a, b]$ (non necessariamente unico) tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

da cui la tesi

Nota: se $f(x) \geqslant 0$ allora il valore $f(c)$ rappresenta l'altezza del rettangolo di base $(b-a)$ avente la stessa area del trapezoide individuato dalla funzione $f(x)$, da cui valor medio

Esempio

> Trovare il c che verifica il teorema della media integrale per la funzione $f(x) = \cos^2 x$ in $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

Soluzione

$$f(c) = \frac{1}{\pi/2 - 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

Ora dobbiamo risolvere in $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ (da cui il “+” nella radice) l’equazione

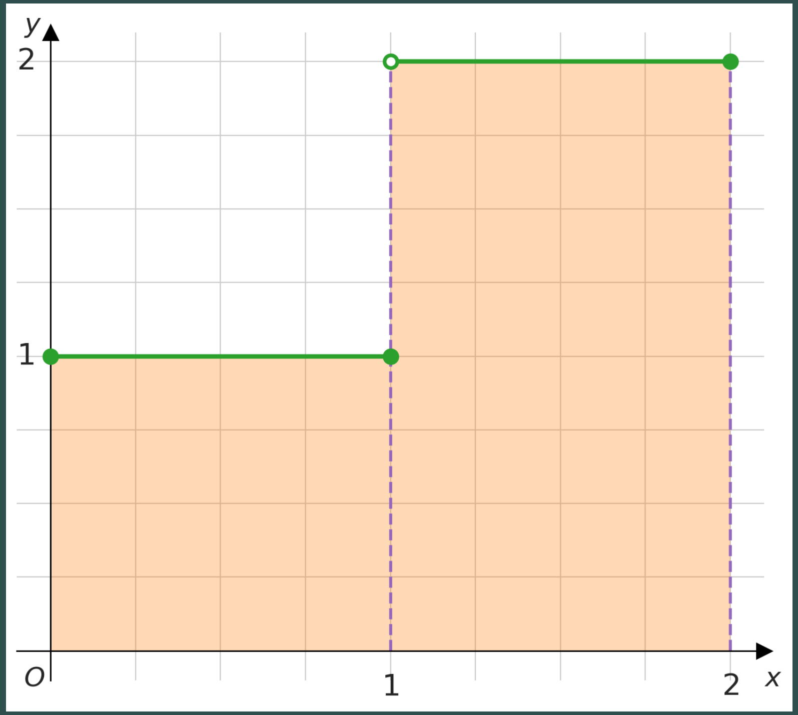
$$\frac{1}{2} = \cos^2 x \implies \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies x = \frac{\pi}{4}$$

Controesempio

Nel teorema della media integrale si fa l'ipotesi che f sia continua

Se f è discontinua, non è detto che esiste c tale che …

Nell'esempio $I = 3$ ma non esiste un c tale che $f(c) = \frac{3}{2}$



Controesempio per il teorema della media

Funzione integrale

Definizione

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{R}$-integrabile.
Si definisce funzione integrale di f la funzione $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ come

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad a \leq x \leq b$$

Continuità della funzione integrale (regolarità)

La funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

è continua in $[a, b]$

Continuità della funzione integrale (regolarità)

Dimostrazione

$$0 \leqslant |F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right|$$

$$\text{(proprietà dell'integrale)}$$

$$\leqslant \left| \int_x^y |f(t)| dt \right|$$

$$(f \text{ limitata})$$

$$\leqslant \left| \int_x^y M\,dt \right| = M|y - x|$$

Continuità della funzione integrale (regolarità)

$$0 \leqslant |F(y) - F(x)| \leqslant M|y - x|$$

Ora per il teorema del confronto (carabinieri / tre funzioni) si ha che

$$\lim_{y \to x} |F(y) - F(x)| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{y \to x} F(y) = F(x)$$

da cui la tesi

Nota:

- Abbiamo dimostrato che la funzione integrale è una funzione Lipschitziana
- $\text{Lipschtzianità} \Longrightarrow \text{Uniforme continuità} \Longrightarrow \text{Continuità}$

Teorema fondamentale del calcolo (parte 1)

> **Teorema**
> Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{R}$-integrabile.
> Se f è continua in $x \in (a,b)$, allora F è derivabile (nei punti di continuità di f) e vale
>
> $$F'(x) = f(x)$$
>
> cioè F è una primitiva di f

Dimostrazione

Per il risultato precedente sappiamo che F è continua in $[a,b]$

Dimostrazione (parte 1)

Scriviamo il rapporto incrementale in un genererico punto x e nell'intervallo $[x-\epsilon, x+\epsilon]$:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t), dt\right]$$

(additività dell'integrale)

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t), dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

(teorema della media integrale, con $x \leqslant x(h) \leqslant x+h$)

$$= f(x(h))$$

Ora, essendo $f(\cdot)$ continua si ha

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x(h)) = f(x)$$

Caratterizzazione delle primitive

> Siano $F(x)$ e $G(x)$ due primitive della funzione f integrabile in $[a, b]$, allora
>
> $$G(x) = F(x) + c$$
>
> per una costante c opportuna (differiscono per una costante)

Dimostrazione

Poniamo $H(x) = G(x) - F(x)$ da cui

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Caratterizzazione delle primitive

Ricordiamo il teorema di Lagrange.

> Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$ e derivabile in (a,b).
> Allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Applicando il teorema di Lagrange a $H(x)$ in $[x,a]$ si ha

$$0 = \frac{H(x) - H(a)}{x - a} \quad \Longrightarrow \quad H(x) = H(a) = c \qquad \text{(costante)}$$

Quindi,

$$G(x) \;=\; F(x) + H(x) \;=\; F(x) + c$$

Teorema fondamentale del calcolo (parte 2)

> **Teorema**
> Sia $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{R}$-integrabile con primitiva F, tale che $F'(x) = f(x)$, allora
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; [F(x)]_a^b \;=\; F(b) - F(a)$$
>
> cioè la differenza di una primitiva per $x = b$ e $x = a$

Dimostrazione

Dal risultato precedente consideriamo una genererica primitiva

$$G(x) = F(x) + c = c + \int_a^x f(t)\,dt$$

Teorema fondamentale del calcolo (parte 2)

$$G(x) = F(x) + c = c + \int_a^x f(t)\,dt$$

Per $x = a$ si ha

$$G(a) = c + \int_a^a f(t)\,dt = c \quad \Longrightarrow \quad c = G(a)$$

Per $x = b$ si ha

$$G(b) = c + \int_a^b f(t)\,dt = G(a) + \int_a^b f(t)\,dt \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$


FINE