Teorema fondamentale del calcolo integrale

(Integrale definito) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 21 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Proprietà dell'integrale definito

Iniziamo a vedere alcune proprietà dell'integrale definito.

Se f è integrale su $[a, b]$, allora

- f è integrabile in ogni suo sotto-intervallo
- $|f|$ è integrabile su $[a, b]$

Poniamo

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0, \quad \forall c \in [a, b]$$

Proprietà dell'integrale definito

Linearità

Per ogni $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx \ = \ \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

Additività rispetto all'intervallo di integrazione

Se $c \in (a, b)$, si ha

$$\int_a^b f(x)\, dx \ = \ \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Proprietà dell'integrale definito

Positività

Se $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha: $$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

Confronto

Se $f(x) \leqslant g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha: $$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

Confronto con il modulo (maggiorazione)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Legame tra primitiva e integrale

Il teorema fondamentale del calcolo integrale:

- trasforma il calcolo dell'integrale definito in una differenza di primitive
- permette di calcolare facilmente gli integrali definiti

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Teorema fondamentale del calcolo integrale

> Sia $f(x)$ una **funzione continua** nell'intervallo chiuso $I = [a, b]$ e sia $F(x)$ una sua primitiva. Allora si ha
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Nota:

Se abbiamo $f(x) = F'(x)$, allora possiamo scrivere

$$\int_a^b F'(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Area della parabola

Ricordiamo che se f è positiva allora l'integrale rappresenta l'area del trapezoide

$$\int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Area della parabola

Integrazione per parti

Teorema

Nel caso degli integrali definiti, la formula di integrazione per parti diviene:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Integrazione per sostituzione

Teorema

Nel caso degli integrali definiti, la formula di integrazione per sostituzione diventa:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

dove f è continua in $[c, d]$, $\phi\colon [a, b] \to [c, d]$ è derivabile con derivata continua

Nota: Esistono diverse varianti, qui ne viene proposta una sola!

Integrazione per sostituzione

Nelle applicazioni

Se la funzione ϕ è invertibile, con $x = \phi(t)$, allora si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

dove si presuppone che l'integrale di destinazione sia più facile di quello di partenza

Gli estremi cambiano nel seguente modo:

- quando $x = a \quad \Longrightarrow \quad t = \phi^{-1}(a)$
- quando $x = b \quad \Longrightarrow \quad t = \phi^{-1}(b)$

Esempio

> Calcolare $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx$

Soluzione

Utilizzando la sostituzione $t = \sqrt{x}$, si ha

- $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ o equivalentemente $2t\,dt = dx$
- $x = 0 \implies t = \sqrt{0} = 0$
- $x = \frac{\pi^2}{4} \implies t = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2}$

Quindi, l'integrale diventa

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cancel{2}\,t\sin t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt$$

Esempio

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt$$

Integriamo per parti $\int t \sin t \, dt$ attraverso la sostituzione $\begin{pmatrix} u = t, & u' = 1 \\ v' = \sin t, & v = -\cos t \end{pmatrix}$

Si ha

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt &= \left[-t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \\ &= \left(-\frac{\pi}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1\right) + \left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 + 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Osservazione

Il teorema fondamentale richiede che la funzione f si continua.

Quindi affermare che

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; \left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{2} \;=\; -\frac{1}{2}+\frac{1}{-2} \;=\; -1$$

non ha senso!

Questo perché la funzione integranda $\frac{1}{x^2}$ è discontinua in $x = 0$.

Nota: Questo integrale lo vedremo in dettaglio quando parleremo degli integrali generalizzati!

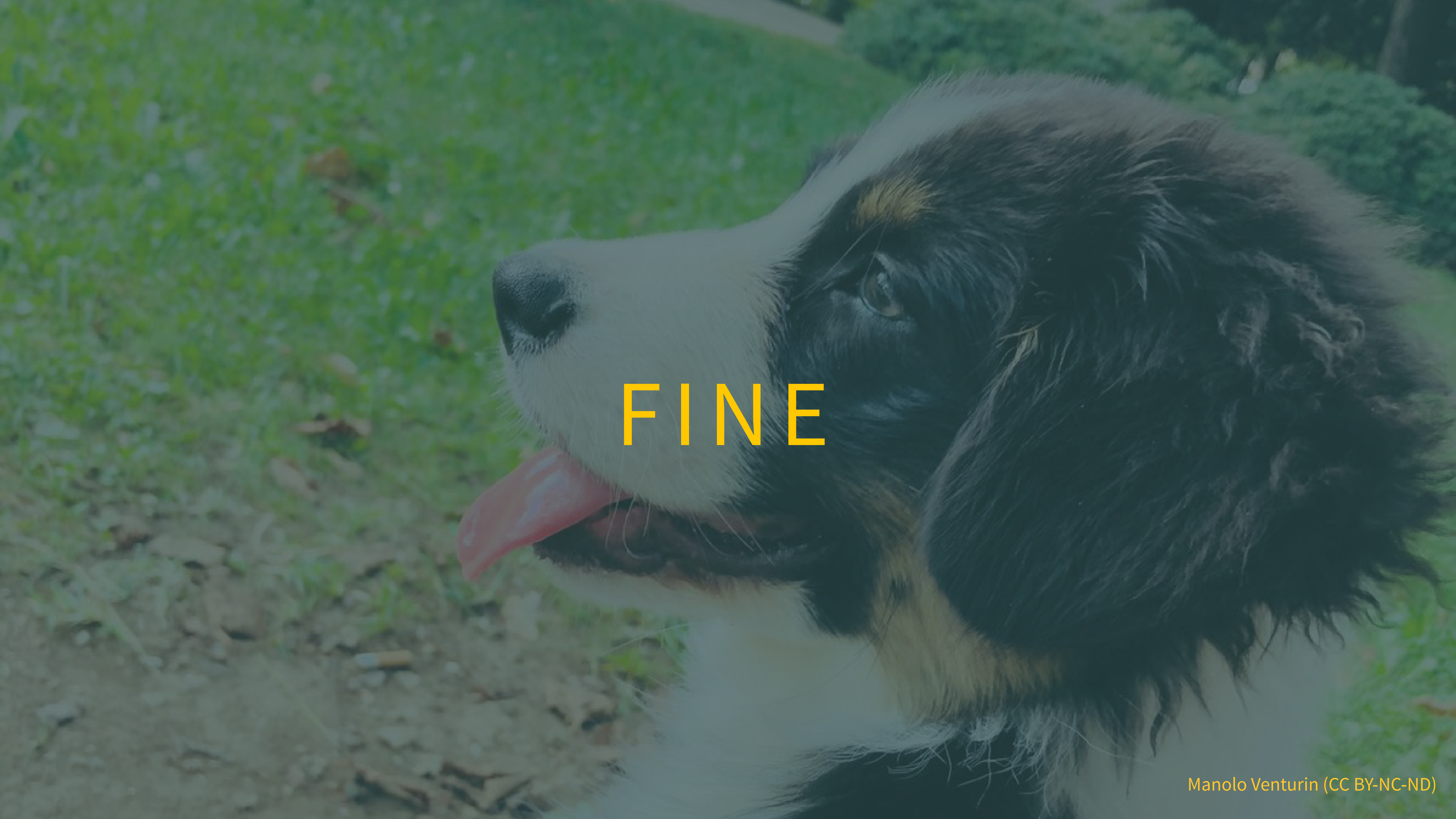
Funzioni integrabili non elementarmente

Ecco un elenco di funzioni continue nel loro dominio di definizione che non ammettono primitiva esprimibile in termini di funzioni elementari

$$e^{\pm x^2}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\cos x}{x}, \quad \sin x^2, \quad \cos x^2, \quad \frac{\sin x}{x^2}, \quad \frac{\cos x}{x^2}, \quad \frac{\ln x}{1+x},$$

Nota:

- Sono tutte funzioni continue e quindi integrabili!
- L'integrale definito si dovrà calcolare, salvo casi eccezionali, numericamente attraverso una procedura di approssimazione


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)