Funzioni integrabili

(Integrale definito) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 21 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Classi di funzioni integrabili

Sono integrabili (teorema):

1. le funzioni $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue
2. le funzioni $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue a tratti
3. le funzioni $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone
4. le funzioni $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monotone a tratti

Esempio tipico di funz. continue a tratti

Nota

- Se f è monotona o monotona a tratti, allora è integrabile anche se ha infiniti punti di discontinuità
- Se f non è monotona allora è (Riemann) integrabile solo se ha un numero finito di punti di discontinuità

$$f(x) = 2^{\lfloor \log_2(x) \rfloor}$$

Esempio di funzione monotona (quindi integrabile) con infiniti punti di discontinuità

Perché le funzioni discontinue a tratti sono integrabili?

Studiamo il caso di una sola discontinuità

Lo stesso ragionamento si estende poi ad eventuali altri punti di discontinuità (in numero finito) della funzione

Esempio (modello)

Funzione modello

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Funzione (modello) discontinua

Per dimostrare che è $\mathcal{R}$-integrabile dobbiamo dimostrare che $I = I'(f) = I''(f)$

Esempio (modello)

Data la suddivisione

$$S = \{0 = x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n = 1\}$$

e dal momento che $f(x) = 0$ per ogni $x > 0$, per $j \geqslant 1$ si ha

$$\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) = 0$$

Nel primo intervallo $[0, x_1]$ con $0 < x \leqslant x_1$ si ha

$$\sup_{x \in [0, x_1]} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \inf_{x \in [0, x_1]} f(x) = 0$$

Esempio (modello)

Somma superiore (rettangoli)

$$\Sigma''(f,S) = 1 \cdot (x_1 - 0) + 0 = x_1$$

Somma inferiore (rettangoli)

$$\Sigma'(f,S) = 0$$

Passando al limite (raffinando $x_1 \to 0$), si ha

$$I'(f) = \sup_S \Sigma'(f,S) = 0 \quad \text{e} \quad I''(f) = \inf_S \Sigma''(f,S) = 0$$

per cui la funzione è integrabile

Esempio (funzione non integrabile)

La funzione di Dirichlet $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

non è $\mathcal{R}$-integrabile poiché $I'(f) = 0$ e $I''(f) = 1$

Questo risultato deriva dal fatto che ogni intervallo di lunghezza diversa da zero contiene sia numeri razionali che irrazionali e quindi

$$\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) = 0$$

Funzione (modello) discontinua

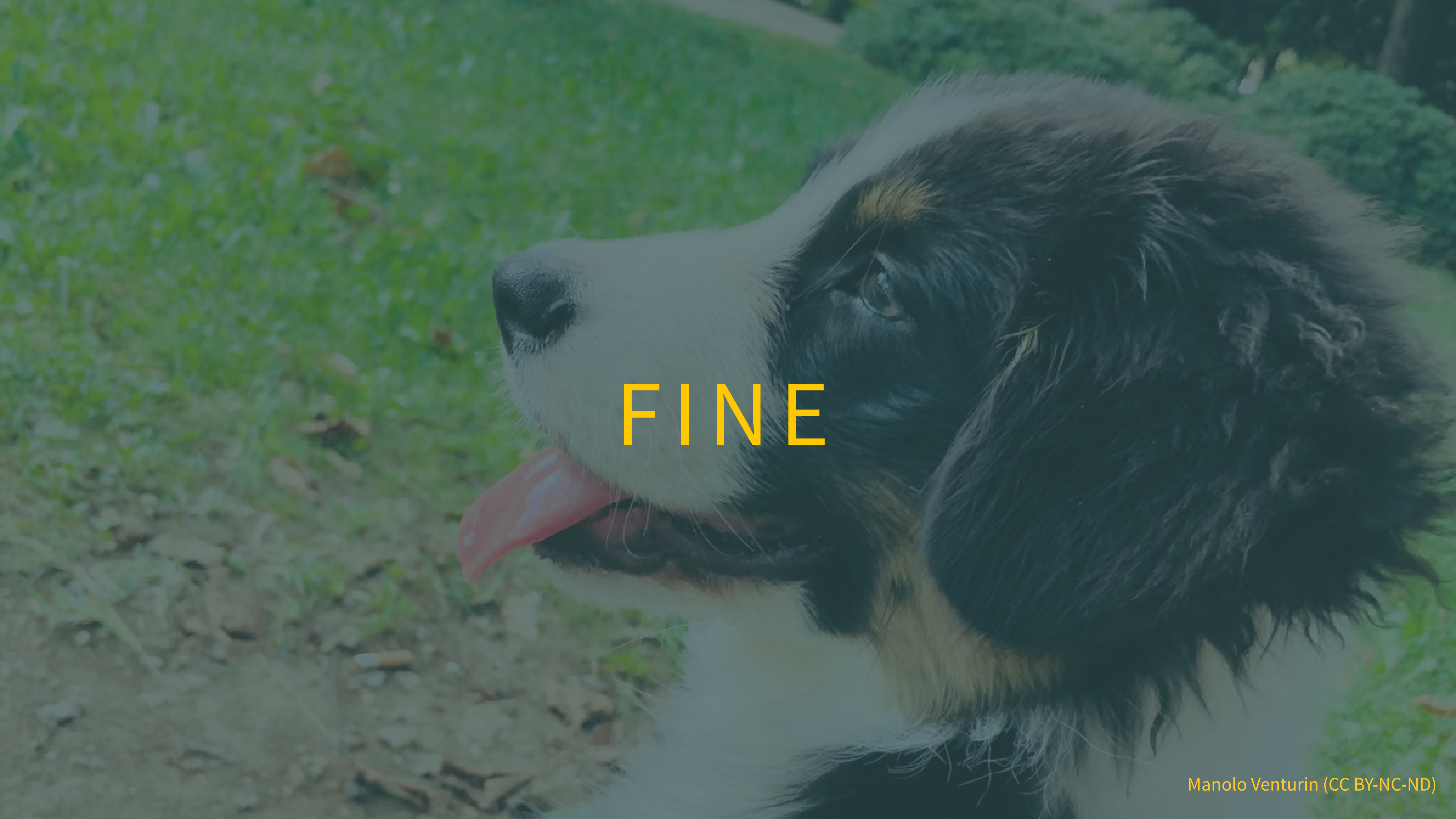
Legame con il valore assoluto

- Si dimostra che se f è $\mathcal{R}$-integrabile allora lo è anche $|f|$
- Se $|f|$ è $\mathcal{R}$-integrabile non è vero che f è $\mathcal{R}$-integrabile

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ -1 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

non è $\mathcal{R}$-integrabile, ma $|f| = 1$ (continua) lo è.


FINE