Integrale (di Riemann)

(Integrale definito) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 21 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

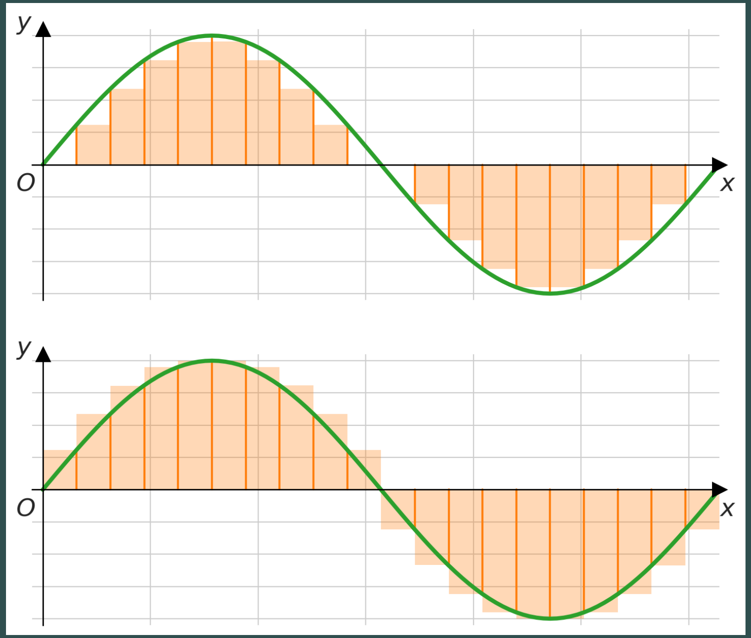
Introduzione

La definizione di integrale che daremo segue i passi precedenti, ovvero come il **limite di una somma**

1. Definiamo l'integrale per le funzioni a scala (rettangoli)

2. Se f è una funzione limitata, allora la possiamo approssimare attraverso delle funzioni a scala dall'alto e dal basso

3. Eseguiamo l'operazione di passaggio al limite

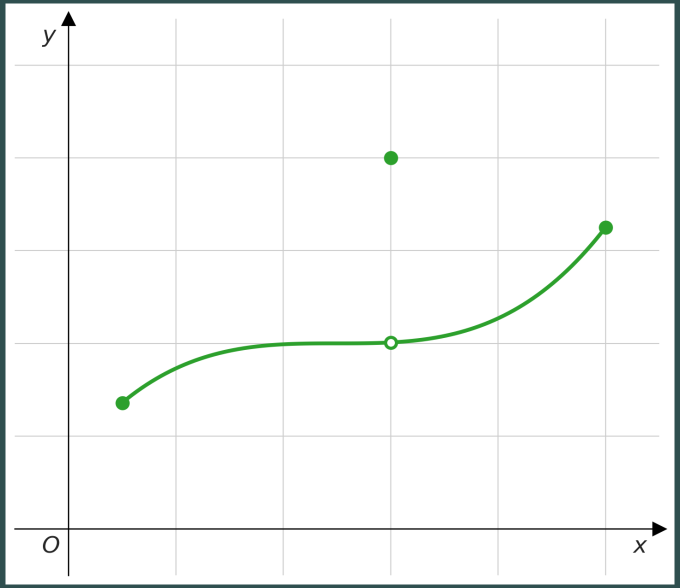


Nota: Esempio di approssimazone dal basso e dall'alto

Ipotesi sulla funzione

Nel seguito, supponiamo che f sia una funzione limitata su un intervallo limitato $[a, b]$

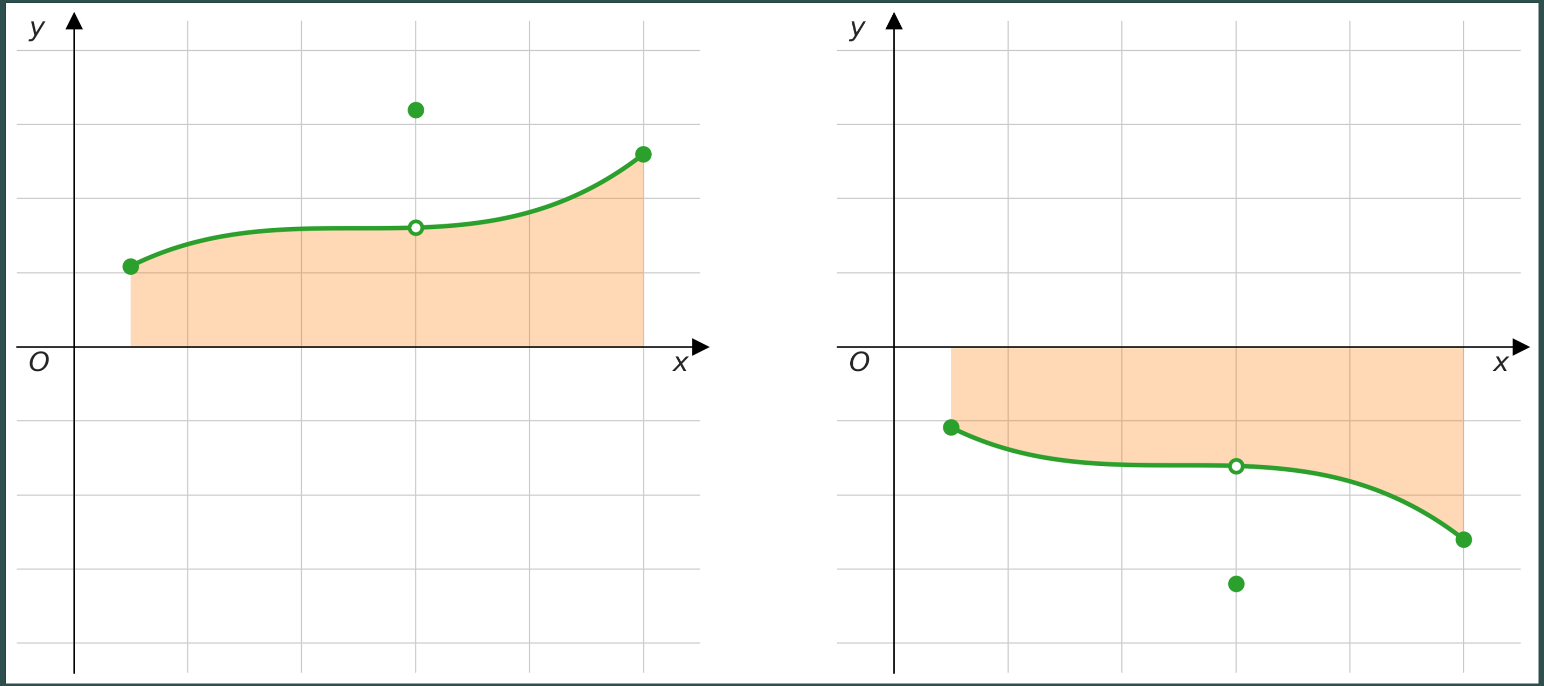
> **Definizione**
> Una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice **limitata**, se esiste un M tale che
> $-M \leqslant f(x) \leqslant M$



Esempio di funz. limitata

Definizione di trapezoide

> Si chiama **trapezoide** di f su $[a, b]$ la parte la parte di piano contenuta nella striscia verticale $a \leqslant x \leqslant b$ e delimitata dalle curve $y = 0$ e $y = f(x)$, formalmente
>
> $$\mathcal{T}_{f,a,b} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [a, b]\,,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\ \vee\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\right\}$$



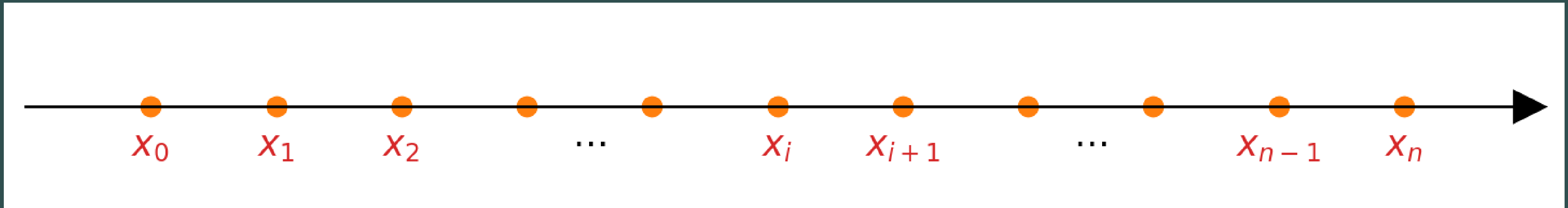
Trapezoide (positivo e negativo)

Suddivisione

> Una **suddivisione** (o partizione) $S = \{x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ di $[a, b]$ è tale che
>
> $$a = x_0 < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$$

Si dice **ampiezza** $|S|$ della suddivisione la massima ampiezza degli intervalli in cui viene suddiviso l'intervallo $[a, b]$, i.e.

$$|S| = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

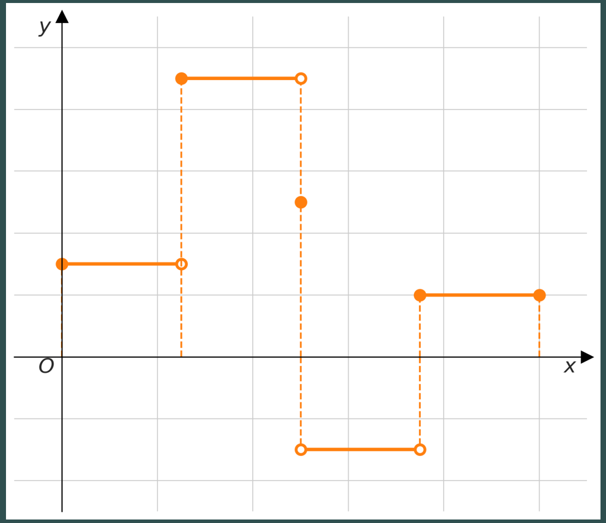


Suddivisione

Funzione a scala

> Una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è detta **funzione a scala** se esiste una suddivisione di $[a,b]$ in n sotto-intervalli tale che f è costante su ogni sotto-intervallo, i.e.
>
> $$f(x) = c_k \quad \forall x \in (x_k, x_{k+1})$$

Nota: Nei punti x_k la funzione f può assumere un qualsiasi valore reale finito, non necessariamente coincidente con quello che lo precedente o segue



Esempio di funzione a scala

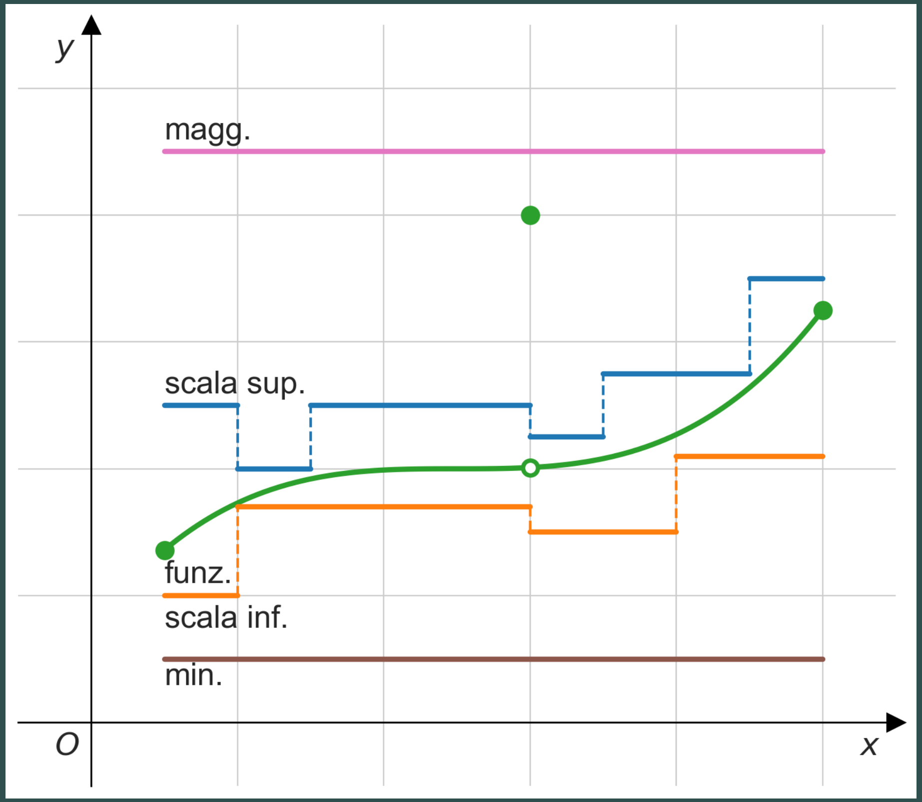
Funzione a scala (proprietà)

Si ha

- Ogni funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata possiede delle funzioni a scala superiori ed inferiori

- Ad esempio, queste funzioni a scala possono essere le costanti definite dai maggioranti e dai minoranti dell'insieme delle immagini di f

- Se f è non è limitata questi maggioranti non esistono



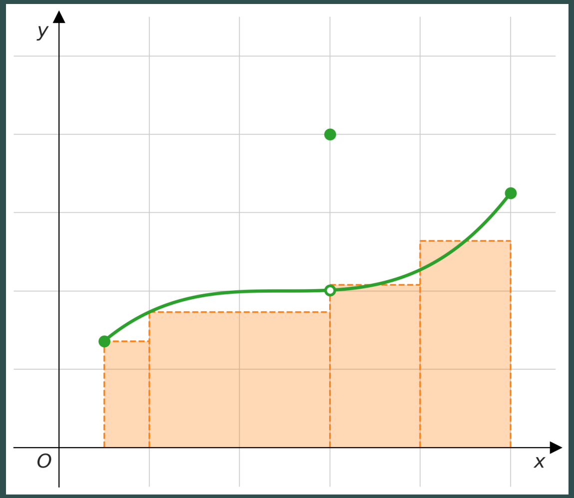
Esempio di funzioni a scala

Somma di Cauchy-Riemann

Siano dati i punti $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$
Diremo che

$$\sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

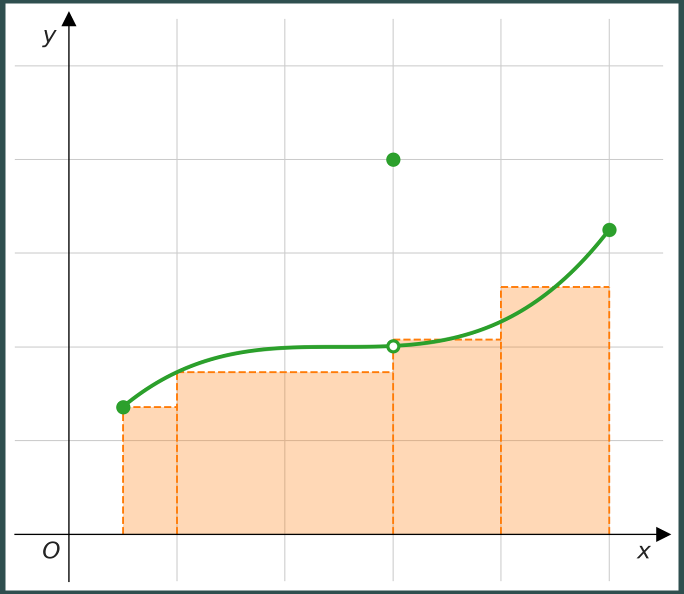
è una somma di Riemann di f sulla suddivisione S



Somma di Cauchy-Riemann

Note:

- Se f è positiva, questa somma rappresenta l'area della funzione a scala che approssima la funzione
- Se f è qualunque allora diremo che è l'integrale della funzione



Funz. a scala come area se f è positiva

Somma superiore e inferiore di Cauchy-Riemann

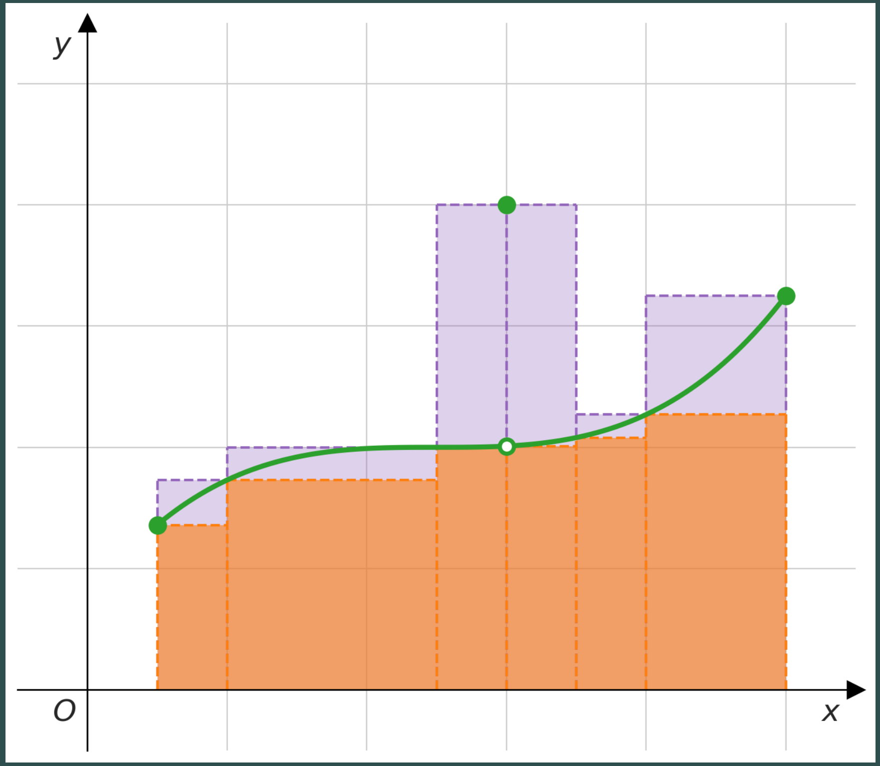
Miglioriamo la somma per una partizione data

Somma superiore

$$\Sigma''(f,S) = \sum_{j=0}^{n} \left[\sup_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

Somma inferiore

$$\Sigma'(f,S) = \sum_{j=0}^{n} \left[\inf_{x\in[x_j,x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$



Somma superiore e inferiore di Riemann

Nota: Ogni somma di Riemann relativa a S è compresa tra $\Sigma'(f,S)$ e $\Sigma''(f,S)$

Raffinamento di una suddivisione

Diciamo che una suddivisione T è un raffinamento della suddivisione S se T contiene tutti i punti di suddivisione di S, ovvero $S \subseteq T$

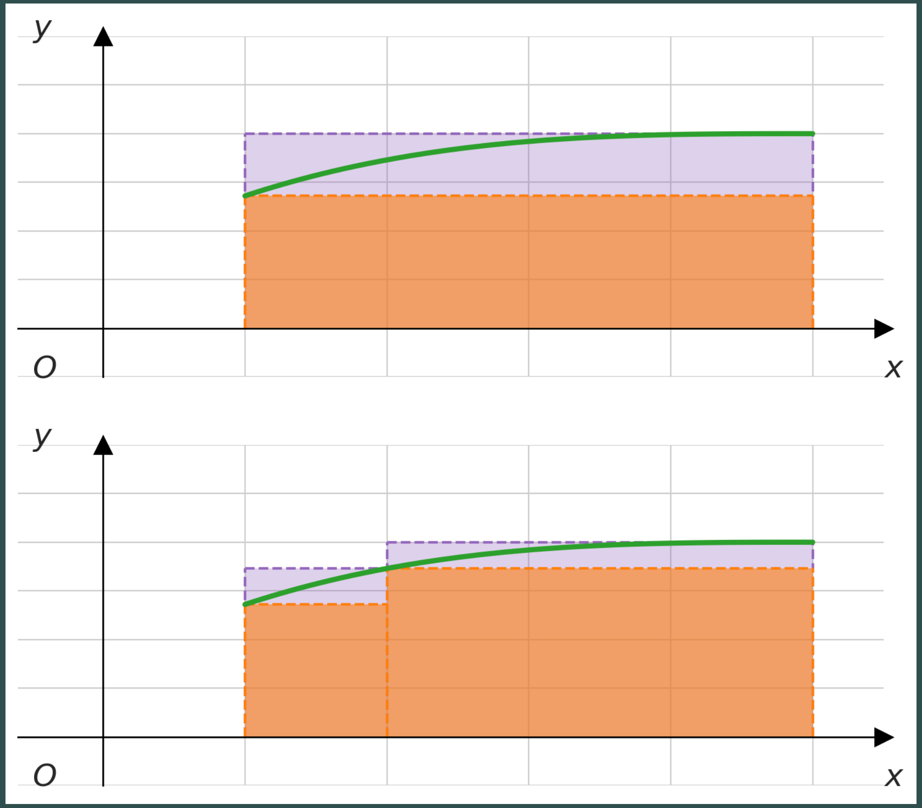
Risultato del raffinamento

$$\Sigma'(f,S) \leqslant \Sigma'(f,T)$$

e

$$\Sigma''(f,S) \geqslant \Sigma''(f,T)$$

Raffinando, la somma inferiore cresce, mentre la somma superiore decresce



Effetto del raffinamento

Integrale inferiore e superiore

Definiamo gli integrali

$$I'(f) = \sup_S \Sigma'(f, S) \quad \text{e} \quad I''(f) = \inf_S \Sigma''(f, S)$$

Si ha:

- Se f è positiva allora $I'(f)$ rappresenta la migliore appross. dal basso dell'area della funzione
- Se f è positiva allora $I''(f)$ rappresenta la migliore appross. dall'alto dell'area della funzione
- Si dimostra che gli integrali $I'(f)$ e $I''(f)$ non dipendono dalla partizione S
- Si ha sempre: $I'(f) \leqslant I''(f)$

Integrale (di Riemann)

> **Definizione** Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.
> Diremo che f è integrabile (secondo Riemann) in $[a,b]$ se $I = I'(f) = I''(f)$.
> In tal caso poniamo
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = I$$

Nota:

- Il simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ viene letto l'integrale definito di $f(x)$ rispetto ad x da $x = a$ a $x = b$
- Le funzioni Riemann integrali, dette anche $\mathcal{R}$-integrabili in $[a,b]$, si indicano con $\mathcal{R}\,[a,b]$
- Se $f \geqslant 0$ allora l'integrale rappresenta l'area del trapezoide


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)