Introduzione al calcolo di aree

(Integrale definito) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 21 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Problema

1. Definire il **concetto di area** di una figura piana (graficamente è intuitivo)?
2. **Calcolare** l'area di una figura piana?

Lo vediamo in modo intuitivo con un esempio:

- Calcolo dell'area di una parabola

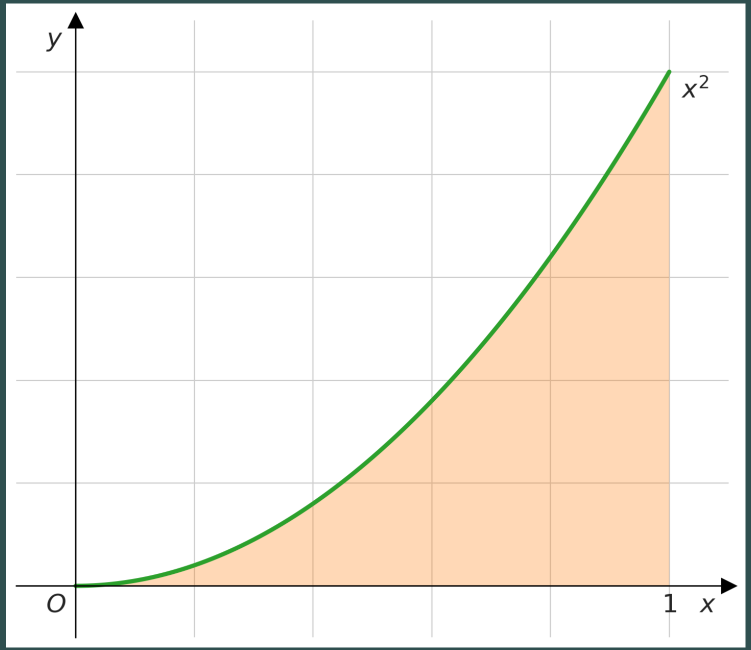
Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Obiettivo e strategia

Obiettivo: Calcolare l'area della regione compresa tra l'asse x e l'arco di parabola $y = x^2$ per $x \in [0, 1]$

Soluzione:

- Dividere l'area in rettangoli con la stessa base
- Fare tendere il numero di rettangoli all'infinito

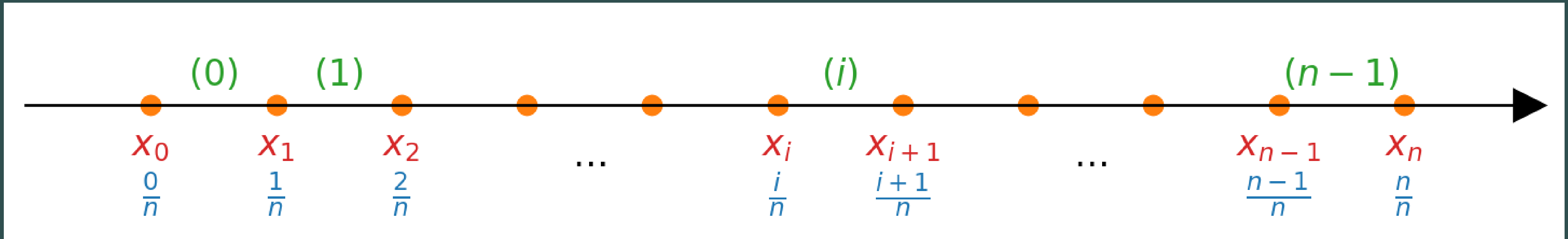


Divisione in rettangoli dell'area della regione

Si divide l'intervallo $[0, 1]$ in n segmenti uguali ($n + 1$ punti)

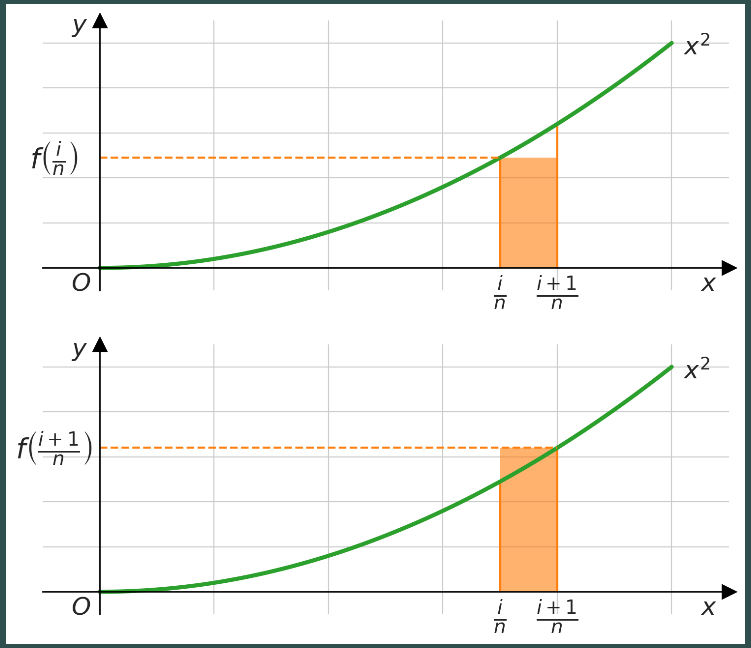
$$0 = x_0 < x_1 < \dots x_{n-1} < x_n = 1$$

dove $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$



Calcolo dell'area (due possibilità)

- Approssimazione dal basso (per difetto)
- Approssimazione dall'alto (per eccesso)



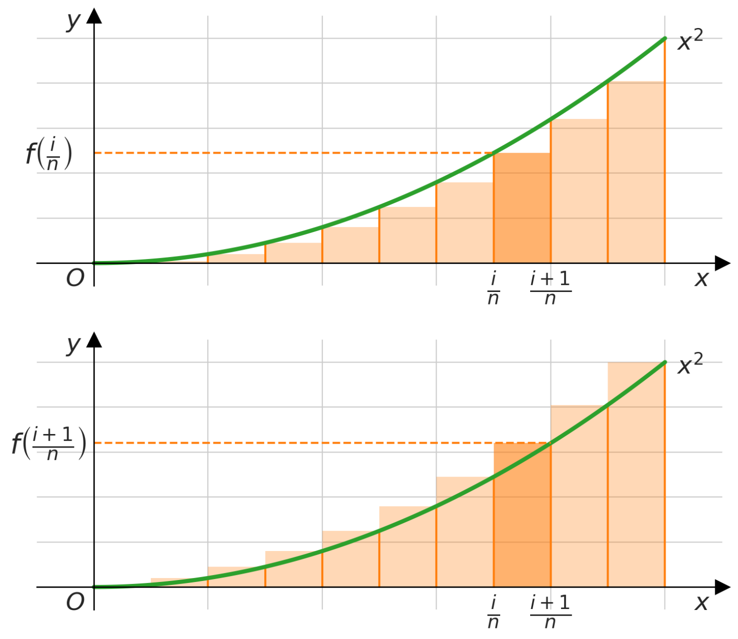
Nota: Somma notevole (dimostrata inizio corso) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Approssimazioni

Approssimazione dal basso

$$\text{Area} \approx S'_n = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\left(\frac{i}{n}\right)^2}_{\text{altezza}}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$



Approssimazione dall'alto

$$\text{Area} \approx S''_n = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{base}} \cdot \underbrace{\left(\frac{i+1}{n}\right)^2}_{\text{altezza}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

Incremento del numero di rettangoli

Per $n \to +\infty$ si ha

Approssimazione dal basso

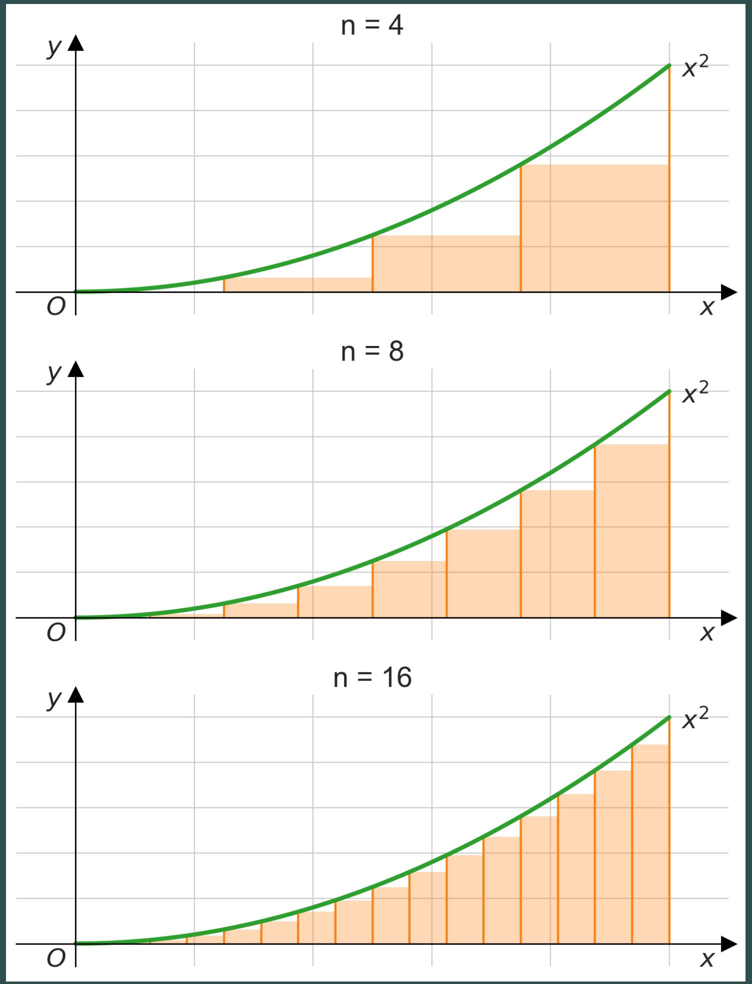
$$S'_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

$$\text{Area} \approx S'_\infty \to \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

Approssimazione dall'alto

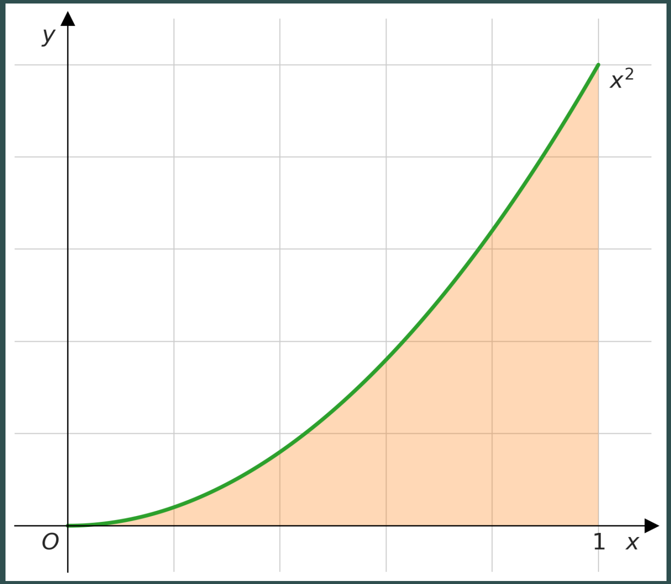
$$S''_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\text{Area} \approx S''_\infty \to \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{3}$$



Area

> Le due approssimazioni (dall'alto e dal basso) coincidono e quindi: l'area della parabola x^2 da 0 a 1 è uguale a $\frac{1}{3}$



Nota: Sostanzialmente l'integrale di Riemann è generalizzazione e la formalizzazione di questa procedura!


FINE