

$$\int \frac{1}{1+x^4} dx$$

(Integrale difficile)

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Esercizio

Calcolare

$$I = \int \frac{1}{1+x^4} dx$$

con semplificazione dell'espressione finale

**Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento**

# Esercizio

Calcolare

$$I = \int \frac{1}{1 + x^4} dx$$

con semplificazione dell'espressione finale

## Soluzione (linee guida)

- Bisogna scrivere  $1 + x^4$  come prodotto di polinomi di grado al più 2 (fratti semplici)
- $1 + x^4 = 0$  non ha radici reali quindi si fattorizza in due polinomi di grado 2 (irriducibili)
- L'integrazione di un polinomio di grado 2 irriducibile produrrà una primitiva con l'arcotangente e una eventuale con il logaritmo
- Dovranno poi essere sommate le soluzioni con i logaritmi e semplificate le espressioni con l'arcotangente

# Fattorizzazione del denominatore

Diverse strategie possibili:

1. uguagliando la scomposizione  $1 + x^4 = (a_1 + b_1x + c_1x^2)(a_2 + b_2x + c_2x^2)$
2. utilizzando i numeri complessi  $1 + x^4 = 0 \implies x^4 = -1$  e utilizzare le radici 4 dell'unità riordinando poi i prodotti in modo opportuno
3. completare il quadrato e utilizzare il prodotto notevole  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Scegliendo la terza strada si ha

$$\begin{aligned} 1 + x^4 &= 1 + x^4 + 2x^2 - 2x^2 = (1 + x^2)^2 - 2x^2 \\ &= (1 + x^2 - \sqrt{2}x)(1 + x^2 + \sqrt{2}x) \end{aligned}$$

# Scomposizione in fratti semplici

Dobbiamo ricercare la seguente scomposizione

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^4} &= \frac{1}{(1-\sqrt{2}x+x^2)(1+\sqrt{2}x+x^2)} \\ &= \frac{Ax+B}{1-\sqrt{2}x+x^2} + \frac{Cx+D}{1+\sqrt{2}x+x^2} \\ &= \frac{(Ax+B)(1+\sqrt{2}x+x^2) + (Cx+D)(1-\sqrt{2}x+x^2)}{1+x^4} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D)x^2 + (A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2})x + (B+D)}{1+x^4}\end{aligned}$$

da cui il sistema da risolvere

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A\sqrt{2}+B-C\sqrt{2}+D=0 \\ A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2}=0 \\ B+D=1 \end{cases} \implies \left\{ A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, D = \frac{1}{2} \right\}$$

# Scomposizione in fratti semplici

Da

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{(1-\sqrt{2}x+x^2)} + \frac{Cx+D}{(1+\sqrt{2}x+x^2)}$$

con

$$\left\{ A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, D = \frac{1}{2} \right\}$$

si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^4} dx &= \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2} dx + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2} dx + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} dx \end{aligned}$$

# Contributo del logaritmo e della arcotangente

$$\underbrace{\int \frac{1}{1+x^4} dx}_I = \underbrace{-\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}x + x^2} dx}_{I_2}$$

Dal momento che compare la  $x$  a numeratore isolo il contributo del log da quello della arctan

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x - 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{(2x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx \end{aligned}$$



# Contributo del logaritmo e della arcotangente

$$\underbrace{\int \frac{1}{1+x^4} dx}_I = \underbrace{-\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} dx}_{I_2}$$

Dal momento che compare la  $x$  a numeratore isolo il contributo del log da quello della arctan

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{(2x+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2} dx \end{aligned}$$

# Integrale da risolvere

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^4} dx &= \underbrace{-\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx}_{I_A} + \underbrace{\frac{1}{4} \int \frac{1}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx}_{I_B} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}x + x^2} dx}_{I_C} + \underbrace{\frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \sqrt{2}x + x^2} dx}_{I_D} \end{aligned}$$

# Integrazione dei termini A e C

Da

- $I_A = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \log(1 - \sqrt{2}x + x^2)$
- $I_C = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}x + x^2} dx = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2}x + x^2)$

si ha

$$I_A + I_C = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left| \frac{1 + \sqrt{2}x + x^2}{1 - \sqrt{2}x + x^2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{8} \log \left| \frac{1 + \sqrt{2}x + x^2}{1 - \sqrt{2}x + x^2} \right|$$

# Integrazione del termine B

$$I_B = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx$$

Dobbiamo scrivere il termine quadrato come somma di due termini quadratici di cui il primo deve essere 1

Da

$$4 [1 - \sqrt{2}x + x^2] = 4 \left[ \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \right] = 4 \left[ \frac{1}{2} + \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] = 2 \left[ 1 + 2 \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] = 2 [1 + (\sqrt{2}x - 1)^2]$$

si ha

$$\begin{aligned} I_B &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 - \sqrt{2}x + x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + (\sqrt{2}x - 1)^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{1 + (\sqrt{2}x - 1)^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan (\sqrt{2}x - 1) \end{aligned}$$

# Integrazione del termine D

$$I_D = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \sqrt{2}x + x^2} dx$$

Dobbiamo scrivere il termine quadrato come somma di due termini quadratici di cui il primo deve essere 1

Da

$$4 [1 + \sqrt{2}x + x^2] = 4 \left[ \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \right] = 4 \left[ \frac{1}{2} + \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] = 2 \left[ 1 + 2 \left( x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] = 2 [1 + (\sqrt{2}x + 1)^2]$$

si ha

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \sqrt{2}x + x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + (\sqrt{2}x + 1)^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{1 + (\sqrt{2}x + 1)^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

# Semplificazione del termine B+D

$$I_B + I_D = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x + 1)$$

Ora, ricordando che

$$\arctan \alpha + \arctan \beta = \arctan \left( \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} \right)$$

si ha

$$I_B + I_D = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \frac{\sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2}x + 1}{1 - (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2} \right)$$

# Soluzione finale

L'integrale

$$I = (I_A + I_C) + (I_B + I_D)$$

diventa

$$I = \frac{\sqrt{2}}{8} \log \left| \frac{1 + \sqrt{2}x + x^2}{1 - \sqrt{2}x + x^2} \right| + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan \left( \frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2} \right)$$

A close-up profile of a dog's head, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue out. The image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the middle of the dog's face.

FINE