Integrazione con sostituzioni notevoli Esercizi #1

(Razionali) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizi

Calcolare

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx \qquad = \left[\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right| + C\right]$
2. $\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx \qquad = \left[\sqrt{x} - \arctan\left(\sqrt{x}\right) + C\right]$
3. $\frac{1}{2}\int \sin\left(\sqrt{x}\right)dx \qquad = \left[-\sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right) + \sin\left(\sqrt{x}\right) + C\right]$
4. $\int \frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad (\text{sost. trig.}) \qquad = \left[-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C\right]$
5. $\int \frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad (\text{sost. } x = \frac{2}{u}) \qquad = \left[-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C\right]$
6. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx \qquad = \left[\sqrt{x^2-4} - 2\arctan\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} + C\right]$
7. $\int \frac{1}{\sin x}\,dx \qquad = \left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\right]$
8. $\int \frac{1}{\cos x}\,dx \qquad = \left[\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C\right]$
9. $\int \frac{dx}{2-\cos x} \qquad = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}\right) + C\right]$

Soluzione

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Esercizio 1

> Calcolare $I = \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx$

Soluzione

Posto $1 - x = u^2$ con

$$x = 1 - u^2 \quad , \quad u = \sqrt{1-x} \quad , \quad dx = -2u\,du$$

si ha

$$I = \int \frac{-2u}{(1-u^2)u}\,du \ = \ -\int \frac{2}{1-u^2}\,du \ = \ -\int \frac{1}{1-u}\,du - \int \frac{1}{1+u}\,du$$
$$= \ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| \ = \ \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right| + C$$

Esercizio 2

> Calcolare $\quad I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

Soluzione

Posto $u = \sqrt{x}$ con

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \iff 2u\,du = dx$$

si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \frac{u}{1+u^2} 2u\,du \ = \int \frac{(u^2+1)-1}{1+u^2}\,du \ = \int du - \int \frac{1}{1+u^2}\,du \\ &= u - \arctan u \ = \ \sqrt{x} - \arctan\left(\sqrt{x}\right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 3

> Calcolare $\quad I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \sin\left(\sqrt{x}\right)\, dx$

Soluzione

Posto $t = \sqrt{x}$ con $\quad dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \iff 2t\, dt = dx \quad$ si ha

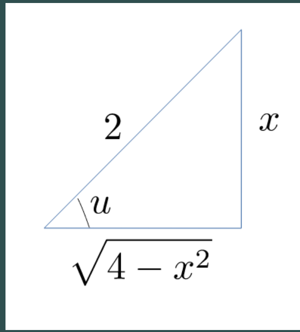
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int \sin t \cdot 2t\, dt \;=\; \int t \sin t\, dt \\ &= \begin{pmatrix} u = t, & u' = 1 \\ v' = \sin t, & v = -\cos t \end{pmatrix} = -t\cos t + \int \cos t \;=\; -t\cos t + \sin t \\ &= -\sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right) + \sin\left(\sqrt{x}\right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 4

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx \quad$ con sostituzione trigonometrica

Soluzione

Posto $x = 2\sin u \quad \Longleftrightarrow \quad \sin u = \frac{x}{2}$ con



$$dx = 2\cos u\, du \quad , \quad \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 u} = 2\cos u$$

si ha

$$I = \int \frac{4}{4\sin^2 u \cdot 2\cos u} \cdot 2\cos u\, du = \int \frac{1}{\sin^2 u}\, du = -\cot u$$

Esercizio 4

$$I = -\cot u \quad , \quad \sin u = \frac{x}{2} \quad , \quad \cos u = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \quad , \quad \tan u = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Si ha

$$I = -\cot u = -\frac{1}{\tan u} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$$

Esercizio 5

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \frac{4}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$ con sostituzione $x = \frac{2}{u}$

Soluzione

Posto $x = \frac{2}{u} \quad \Longleftrightarrow \quad u = \frac{2}{x}$ con

$$dx = -\frac{2}{u^2}\,du \quad , \quad \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-\frac{4}{u^2}} = 2\,\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}$$

si ha

$$I = \int \frac{4}{\frac{4}{u^2}\cdot 2\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}}\cdot\left(-\frac{2}{u^2}\right)du \;=\; -\int \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,du \;=\; -\frac{1}{2}\int \frac{2u}{\sqrt{u^2-1}}\,du$$

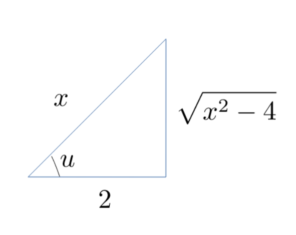
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\left(u^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{u^2-1} = -\sqrt{\frac{4}{x^2}-1} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$$

Esercizio 6

> Calcolare l'integrale $I = \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

Soluzione

Posto $x = \frac{2}{\cos u}$ con



$$dx = 2\frac{\sin u}{\cos^2 u}\,du \quad , \quad \sqrt{x^2-4} = 2\tan u$$

si ha

$$I = \int \frac{2\tan u}{\frac{2}{\cos u}} \cdot 2\frac{\sin u}{\cos^2 u}\,du = 2\int \tan^2 u\,du = 2\left(\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,du\right) = 2(\tan u - u)$$

Esercizio 6

$$I = 2(\tan u - u) \quad , \quad \cos u = \frac{2}{x} \quad , \quad \tan u = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}$$

E’ preferibile esprimere la soluzione in termini di $\arctan(\cdot)$ che $\arccos(\cdot)$ perché la soluzione calcolata con la prima è valida sia per x positive che negative, mentre la seconda solo per x positive

Quindi,

$$I = \sqrt{x^2 - 4} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}\right) + C$$

Esercizio 7

> Calcolare $I = \int \frac{1}{\sin x}\, dx$ con la sostituzione della tangente

Soluzione

Utilizzando la sostituzione $t = \tan \frac{x}{2}$

- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
- $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

si ha

$$I = \int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}\, t} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}\, dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

Esercizio 8

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx \quad$ con la sostituzione della tangente

Soluzione

Utilizzando la sostituzione $t = \tan \frac{x}{2}$

- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

si ha

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{1-t^2} \cdot \frac{2}{\cancel{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt$$

Esercizio 8

Usando la scomposizione in fratti semplici, si ha

$$\begin{aligned} I = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt \ &= \int \frac{1}{1-t}\,dt + \int \frac{1}{1+t}\,dt \\ &= \ln|1+t| - \ln|1-t| \\ &= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \\ &= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C \end{aligned}$$

Esercizio 9

> Calcolare l'integrale
>
> $$I = \int \frac{dx}{2 - \cos x}$$

Soluzione

Utilizzando la sostituzione $t = \tan \frac{x}{2}$, si ha

$$I = \int \frac{dx}{2 - \cos x} = \int \frac{1}{2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = 2 \int \frac{1}{1+3t^2}\, dt$$

Esercizio 9

$$I = 2\int \frac{1}{1+3t^2}\,dt \quad , \quad t = \tan\frac{x}{2}$$

Riconducendolo alla formula dell'arcotangente, si ha

$$2\int \frac{1}{1+3t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}t\right)^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}t\right)$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{2-\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}\right) + C$$


FINE