Fratti semplici
Fattori di secondo grado
Esercizi #1

(fratti semplici) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizi

Calcolare

1. $\int \frac{4x+1}{x^2+1}\,dx \quad = \quad \left[2\log\left|x^2+1\right| + \arctan x + C\right]$
2. $\int \frac{2x^5+1}{x^2+x^4}\,dx \quad = \quad \left[x^2 - \frac{1}{x} - \ln\left(1+x^2\right) - \arctan x + C\right]$
3. $\int \frac{1}{x^3-1}\,dx \quad = \quad \left[\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C\right]$
4. $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx \quad = \quad \left[\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right.$

$$\left. - \frac{1}{4}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + C\right]$$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Soluzione

Esercizio 1

> Calcolare $\quad I = \int \frac{4x+1}{x^2+1}\,dx$

Soluzione

Isolando la derivata del denominatore al numeratore, si ha

$$\frac{4x+1}{x^2-1} = 2\frac{(2x)}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

per cui l'integrale diventa

$$\begin{aligned} I &= 2\int \frac{(2x)}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= 2\log\left|x^2+1\right| + \arctan x + C \end{aligned}$$

Esercizio 2

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \frac{2x^5 + 1}{x^2 + x^4}\, dx$

Soluzione

Eseguendo la divisione tra $2x^5 + 1$ e $x^2 + x^4 = x^2(x^2 + 1)$ si ha
$2x^5 + 1 = (x^4 + x^2)(2x) + (-2x^3 + 1)$

$2x^5$	0	0	0	0	1	x^4	$+x^2$
$-2x^5$		$-2x^3$				$2x$	
0	0	$-2x^3$	0	0	1		

e quindi

$$\frac{2x^5 + 1}{x^2 + x^4} = \frac{(x^4 + x^2)(2x) + (-2x^3 + 1)}{x^2 + x^4} = 2x + \frac{(-2x^3 + 1)}{x^2 + x^4}$$

Esercizio 2

$$\frac{2x^5+1}{x^2+x^4} = 2x + \frac{(-2x^3+1)}{x^2+x^4}$$

Ora la fattorizzazione del termine $\frac{(-2x^3+1)}{x^2+x^4}$ è

$$\frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+C=-2 \\ B+D=0 \\ A=0 \\ B=1 \end{cases} \implies \{A=0\,, B=1\,, C=-2\,, D=-1\}$$

da cui

$$\frac{-2x^3+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{2x+1}{x^2+1}$$

Esercizio 2

$$\frac{2x^5+1}{x^2+x^4} = 2x + \frac{1}{x^2} - \frac{2x+1}{x^2+1}$$

La fattorizzazione finale (isolando la derivata) diventa

$$\frac{2x^5+1}{x^2+x^4} = 2x + \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}$$

il cui integrale è

$$\begin{aligned} I &= \int 2x\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= x^2 - \frac{1}{x} - \ln\left(1+x^2\right) - \arctan x + C \end{aligned}$$

Esercizio 3

> Calcolare $I = \int \frac{1}{x^3 - 1}\, dx$

Soluzione

Da $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ si ha che x^2+x+1 è irriducibile con scomposizione (somma di quadrati)

$$x^2 + x + 1 \; = \; \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Esercizio 3

Da $\frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)}$ si ha

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \implies \left\{A=\frac{1}{3}\,, B=-\frac{1}{3}\,, C=-\frac{2}{3}\right\}$$

Quindi, si ha

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

Esercizio 3

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1}$$

Dal secondo termine (espressione quadratica) isoliamo il contributo della derivata del denominatore ottenendo

$$-\frac{1}{3}\frac{x+2}{x^2+x+1} = -\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{2x+4}{x^2+x+1} = -\frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$$

La fattorizzazione diventa

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$$

Esercizio 3

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$$

Il contributo del termine quadrato irriducibile è

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)}$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

La fattorizzazione finale diventa

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

Esercizio 3

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

L'integrale finale è

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 4

> Calcolare $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\, dx$

Soluzione

Abbiamo la seguente fattorizzazione

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$$

con nessun termine quadratico ulteriormente fattorizzabile

Esercizio 4

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+1-x)(x^2+1+x)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+x^2+1} &= \frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (-A+B+C+D)x^2 + (A-B+C+D)x + (B+D)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B+C+D=0 \\ A-B+C+D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \implies \left\{A=\frac{1}{2}\,, B=\frac{1}{2}\,, C=-\frac{1}{2}\,, D=\frac{1}{2}\right\}$$

La fattorizzazione diventa

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+x+1}}_{A} \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2-x+1}}_{B}$$

Esercizio 4

$$\frac{1}{x^4+x^2+1} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+x+1}}_{A} \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2-x+1}}_{B}$$

Soluzione: contributo A (derivata+arctang)

$$\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{4}\frac{2x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{4}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+x+1}$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

Soluzione: contributo B (derivata+arctang)

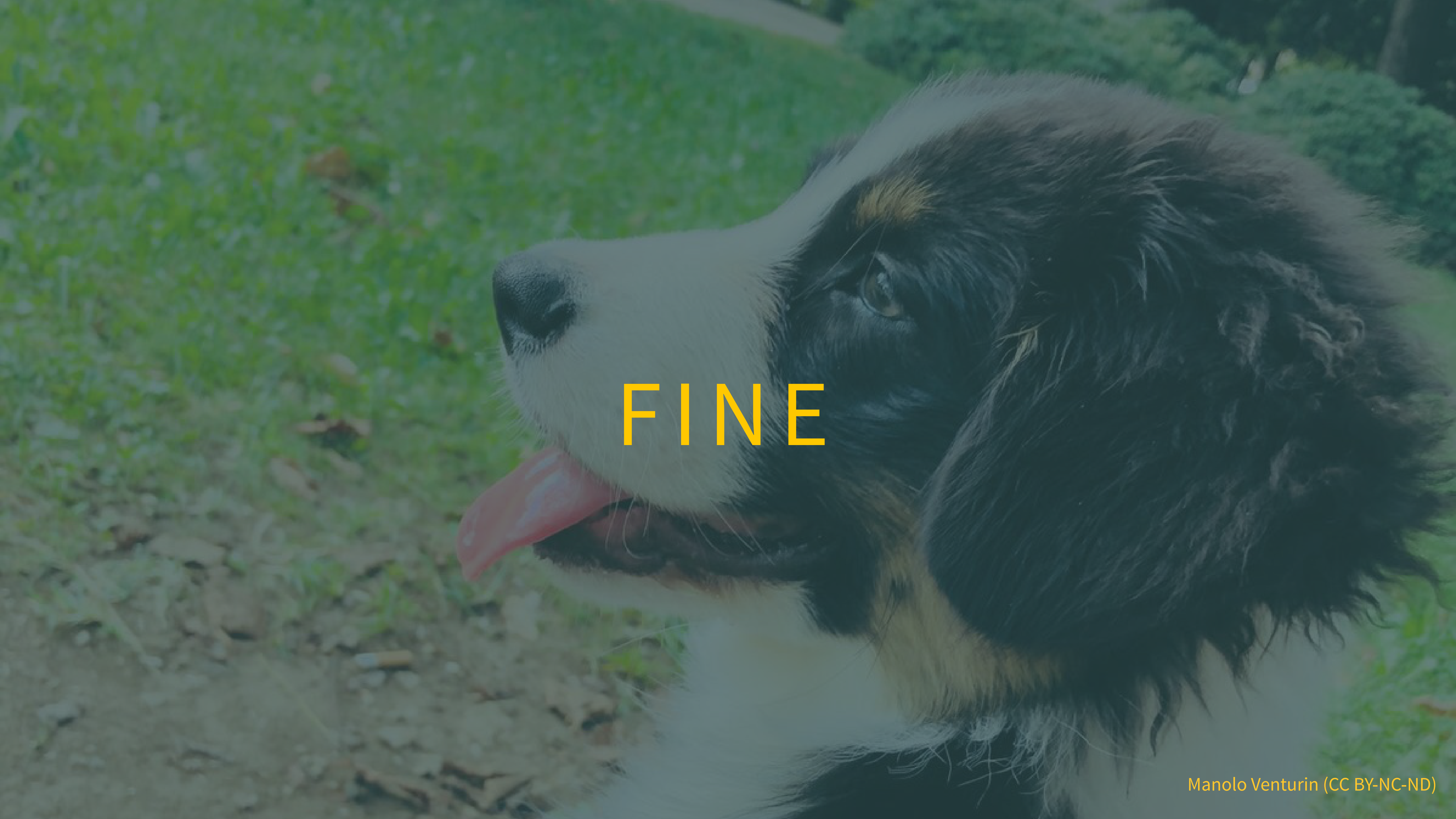
$$-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2-x+1} = -\frac{1}{4}\frac{2x-2}{x^2-x+1} = -\frac{1}{4}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2-x+1}$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

Esercizio 4

Soluzione finale (contributo A+B)

$$
\begin{aligned}
I \;=\; & \frac{1}{4}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,dx \\
& -\frac{1}{4}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2}\,dx \\
=\; & \frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) \\
& -\frac{1}{4}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + C
\end{aligned}
$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)