

Fratti semplici

Fattori di secondo grado

(fratti semplici) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Indici degli esempi

Calcolare

1.  $\int \frac{3x + 1}{x^2 - 2x + 2} dx$

2.  $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$

3.  $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx$

4.  $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx$

5.  $\int \frac{4x^4}{x^4 - 1} dx$

**Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento**

# Scomposizione generale

Dato un integrale (fattore quadratico generale) della forma

$$\int \frac{cx + d}{x^2 + ax + b} dx$$

si può sempre isolare la derivativa del denominatore al numeratore e scrivere

$$\begin{aligned} \int \frac{cx + d}{x^2 + ax + b} dx &= \frac{c}{2} \int \frac{(2x + a) + \left(\frac{2d}{c} - a\right)}{x^2 + ax + b} dx \\ &= \frac{c}{2} \int \frac{(2x + a)}{x^2 + ax + b} dx + \frac{c}{2} \int \frac{\left(\frac{2d}{c} - a\right)}{x^2 + ax + b} dx \\ &= \frac{c}{2} \ln |x^2 + ax + b| + A \int \frac{1}{x^2 + ax + b} dx \end{aligned}$$

dove  $A = \frac{2d}{c} - a$

# Scomposizione generale

Quindi il caso quadratico si riduce (scomposizione)

- ad un integrale con la derivata del denominatore a numeratore

$$\int \frac{(2x + b)}{x^2 + ax + b} dx$$

- ad un integrale con il numeratore costante, i.e.

$$\int \frac{1}{x^2 + ax + b} dx$$

**Nota:** Bisogna discutere come calcolare  $\int \frac{1}{x^2 + ax + b} dx$  nei diversi casi!

# Esempio 1 (scomp. quadratica)

Calcolare  $I = \int \frac{3x + 1}{x^2 - 2x + 2} dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2} \int \frac{2x + \frac{2}{3}}{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(2x - 2) + \left(\frac{2}{3} + 2\right)}{x^2 - 2x + 2} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x - 2)}{x^2 - 2x + 2} dx + \frac{3}{2} \int \frac{\frac{8}{3}}{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2 - 2x + 2| dx + 4 \int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2 - 2x + 2| dx + 4 \int \frac{1}{(x - 1)^2 + 1} dx \\ &= \left( \begin{array}{l} u = x - 1 \\ du = dx \end{array} \right) = \frac{3}{2} \ln|x^2 - 2x + 2| dx + 4 \int \frac{1}{1 + u^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2 - 2x + 2| dx + 4 \arctan u = \frac{3}{2} \ln|x^2 - 2x + 2| dx + 4 \arctan(x - 1) + C \end{aligned}$$

# Caso quadratico $\Delta > 0$ : due radici reali distinte

Da  $\Delta > 0$  si ha che

$$x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta)$$

e quindi, possiamo scrivere

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}$$

dove  $A = \frac{1}{\alpha + \beta}$ ,  $B = -\frac{1}{\alpha + \beta}$  sono due costanti determinate tramite uguaglianza, da cui

$$\int \frac{1}{x^2 + ax + b} dx = \int \frac{A}{x - \alpha} dx + \int \frac{B}{x - \beta} dx = A \ln |x - \alpha| + B \ln |x - \beta|$$

# Esempio 2 ( $\Delta > 0$ )

Calcolare  $I = \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$

**Soluzione**

Da

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-2)(x-3)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{(x-2)(x-3)} \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{cases} A+B=0 \\ (-3A-2B)=1 \end{cases} \implies \begin{cases} A=-B \\ (3B-2B)=1 \end{cases} \implies \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$



# Esempio 2 ( $\Delta > 0$ )

Quindi

$$I = - \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{1}{x-3} dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C$$

# Caso quadratico $\Delta = 0$ : due radici reali coincidenti

Se  $\Delta = 0$  allora possiamo scrivere

$$x^2 + ax + b = (x - \alpha)^2$$

e quindi

$$\int \frac{1}{x^2 + ax + b} dx = \int \frac{1}{(x - \alpha)^2} dx = -\frac{1}{x - \alpha}$$

# Esempio 3 ( $\Delta = 0$ )

Calcolare  $I = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx$

**Soluzione**

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx = \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx = -\frac{1}{x - 1} + C$$

# Caso quadratico $\Delta < 0$ : nessuna radice reale

Se  $\Delta < 0$  allora possiamo scrivere (completando il quadrato / somma di due quadrati)

$$x^2 + ax + b = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

Quindi, l'integrale di

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx$$

si risolve riscrivendolo come

$$\frac{1}{\beta^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right)^2} dx$$

# Caso quadratico $\Delta < 0$ : nessuna radice reale

La primitiva di

$$\frac{1}{\beta^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} dx$$

è un  $\arctan(\cdot)$  attraverso un opportuno cambio di variabile

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} dx &= \left( \begin{array}{l} u = \frac{x-\alpha}{\beta} \\ du = \frac{1}{\beta} \end{array} \right) = \frac{1}{\beta} \int \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{1}{\beta} \arctan u \\ &= \frac{1}{\beta} \arctan \left( \frac{x - \alpha}{\beta} \right) \end{aligned}$$

# Esempio 4 ( $\Delta < 0$ )

Calcolare  $I = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx$

## Soluzione

Essendo  $\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$ , si ha  $x^2 + 2x + 3$  come  $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$  da cui

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2} dx \\ &= \left( \begin{array}{l} u = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \\ du = \frac{dx}{\sqrt{2}} \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan u = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right) + C \end{aligned}$$

# Esempio 5 (abbastanza comune)

Calcolare  $I = \int \frac{4x^4}{x^4 - 1} dx$

## Soluzione

Il grado del numeratore è maggiore o uguale del grado del denominatore e quindi procedo alla sua riduzione (o con Ruffini o con altra tecnica)

$$\frac{4x^4}{x^4 - 1} = \frac{4(x^4 - 1) + 4}{x^4 - 1} = 4 + \frac{4}{x^4 - 1}$$

La fattorizzazione del denominatore è

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

# Esempio 5 (abbastanza comune)

$$\frac{4x^4}{x^4 - 1} = 4 + \frac{4}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}$$

La scomposizione in fratti semplici della parte irriducibile è

$$\begin{aligned}\frac{4}{x^4 - 1} &= \frac{4}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \\ &= \frac{(A(x + 1) + B(x - 1))(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} \\ &= \frac{(A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 0 \\ A + B - C = 0 \\ A - B - D = 4 \end{cases} \implies \{A = 1, B = -1, C = 0, D = -2\}$$



# Esempio 5 (abbastanza comune)

Quindi, si ha

$$\frac{4}{x^4 - 1} = \frac{4}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x^2 + 1}$$

La fattorizzazione definitiva è

$$\frac{4x^4}{x^4 - 1} = 4 + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{x^2 + 1}$$

da cui

$$\begin{aligned} I &= 4 \int dx + \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{1}{x + 1} dx - 2 \int \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= 4x + \ln |x - 1| - \ln |x + 1| - 2 \arctan x + C \end{aligned}$$

# Scomposizione generale nel caso fattori quadratici (ripetuti)

# Regola generale di scomposizione

Ad **ogni fattore** quadratico  $x^2 + ax + b$  che figuri  $n$  volte al denominatore di una funzione razionale propria corrisponde ad una somma di  $n$  frazioni parziali della forma

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + ax + b)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(x^2 + ax + b)^n}$$

Per risolvere l'integrale “modello”

$$I_n = \int \frac{1}{(1 + x^2)^n} dx$$

si usa la formula di ricorrenza

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \left[ \frac{x}{(1 + x^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right]$$

**Nota:** Tipicamente gli esercizi con fattori quadratici ripetuti non si trovano agli esami

# Metodo di Hermite

Una variante dei fratti semplici è il metodo di Hermite.

Fatemi sapere se vi serve e volte un video su questo!

A close-up profile of a dog's head, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue out. The image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the middle of the dog's face.

FINE