Fratti semplici
Fattori di primo grado
Esercizi #1

(Fratti semplici) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizi

Calcolare

1. $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx = \left[\frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C\right]$
2. $\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx = \left[-x + \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln|1-x| + C\right]$
3. $\int \frac{x^4+x+1}{x^2(x+1)}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x} + \ln|1+x| + C\right]$
4. $\int \frac{x^4-x^3-3x^2+x}{1-x^2}\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \ln|1+x| + \ln|1-x| + C\right]$
5. $\int \frac{20}{(x-1)(x-2)(x+3)}\,dx = \left[-5\ln|x-1| + 4\ln|x-2| + \ln|x+3| + C\right]$
6. $\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx = \left[\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C\right]$
7. $\int \frac{1}{x^3(x+1)^2}\,dx = \left[3\ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} - 3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C\right]$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Soluzione

Esercizio 1

> Calcolare $I = \int \frac{1}{x^2-4}\,dx$

Soluzione

Fattorizzazione

Da

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{(A+B)x+2(A-B)}{(x-2)(x+2)}$$

si ha (uguagliando i coefficienti si ha)

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2(A-B)=1 \end{cases} \implies \left\{A=\frac{1}{4}\,, B=-\frac{1}{4}\right\}$$

Esercizio 1

Si ha

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x+2)}$$

Integrale

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C \end{aligned}$$

Esercizio 2

> Calcolare $I = \int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx$

Soluzione

Fattorizzazione

La fattorizzazione è facilmente ottenibile da

$$\frac{x^2}{1-x^2} = -\frac{-x^2}{1-x^2} = -\frac{(1-x^2)-1}{1-x^2} = -1+\frac{1}{1-x^2} = -1+\frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

Ora

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}$$

Esercizio 2

Si ha

$$\frac{x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-x}$$

Integrale

$$\begin{aligned} I &= -\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,dx \\ &= -x + \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln|1-x| + C \end{aligned}$$

Esercizio 3

> Calcolare $I = \int \frac{x^4 + x + 1}{x^2(x+1)}\,dx$

Soluzione

Riduzione di grado

Per il calcolo della fattorizzazione osserviamo che il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore e quindi procediamo con la divisione tra polinomi tra

- Numeratore: $x^4 + x + 1$
- Denominatore: $x^2(x+1) = x^3 + x^2$

Esercizio 3

- Numeratore: $x^4 + x + 1$
- Denominatore: $x^2(x+1) = x^3 + x^2$

$$
\begin{array}{ccccc|cc}
x^4 & 0 & 0 & +x & 1 & x^3 & x^2 \\
\hline
-x^4 & & & & & x & -1 \\
\hline
 & -x^3 & & +x & 1 & & \\
 & +x^3 & +x^2 & & & & \\
\hline
 & & +x^2 & +x & +1 & &
\end{array}
$$

da cui $x^4 + x + 1 = (x^3 + x^2)(x-1) + (x^2 + x + 1)$

Quindi, la funzione integranda si può scrivere come

$$\frac{x^4 + x + 1}{x^2(x+1)} = \frac{(x^2(x+1))(x-1) + (x^2 + x + 1)}{x^2(x+1)} = x - 1 + \frac{(x^2 + x + 1)}{x^2(x+1)}$$

Esercizio 3

$$\frac{x^4+x+1}{x^2(x+1)} = x-1+\frac{(x^2+x+1)}{x^2(x+1)}$$

Fattorizzazione (della parte irriducibile)

Da $\frac{x^2+x+1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)} = \frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(x+1)}$ con

$$\begin{cases} A+C=1 \\ A+B=1 \\ B=1 \end{cases} \implies \{A=0\,,B=1\,,C=1\}$$

si ha

$$\frac{x^2+x+1}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$$

Esercizio 3

$$\frac{x^4+x+1}{x^2(x+1)} = x-1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$$

Integrale

Si ha

$$\begin{aligned} I &= \int x\,dx - \int dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{x} + \ln|1+x| + C \end{aligned}$$

Esercizio 4

Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + x}{1 - x^2}\, dx$

Soluzione

Riduzione di grado

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
x^4 & -x^3 & -3x^2 & +x & 0 & -x^2 & +1 & \\
\hline
-x^4 & & +x^2 & & & -x^2 & +x & +2 \\
\hline
0 & -x^3 & -2x^2 & +x & 0 & & & \\
 & +x^3 & & -x & & & & \\
\hline
 & 0 & -2x^2 & 0 & 0 & & & \\
 & & +2x^2 & & -2 & & & \\
\hline
 & & & & -2 & & &
\end{array}
$$

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x = (1 - x^2)(-x^2 + x + 2) - 2$$

Esercizio 4

Si ha

$$\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + x}{1 - x^2} = \frac{(1 - x^2)(-x^2 + x + 2) - 2}{(1 - x^2)} = (-x^2 + x + 2) - \frac{2}{1 - x^2}$$

$$= (-x^2 + x + 2) - 2\frac{1}{(1 - x)(1 + x)}$$

Fattorizzazione della parte irriducibile

$$\frac{1}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1}{2}\frac{2}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1}{2}\frac{(1 - x) + (1 + x)}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - x}$$

Fattorizzazione finale

$$\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + x}{1 - x^2} = (-x^2 + x + 2) - \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 - x}$$

Esercizio 4

$$\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + x}{1 - x^2} = (-x^2 + x + 2) - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$$

Integrazione

$$\begin{aligned} I &= \int (-x^2 + x + 2)\, dx - \int \frac{1}{1+x}\, dx - \int \frac{1}{1-x}\, dx \\ &= -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \ln|1+x| + \ln|1-x| + C \end{aligned}$$

Esercizio 5

> Calcolare $I = \int \frac{20}{(x-1)(x-2)(x+3)}\,dx$

Soluzione

Ricerca della fattorizzazione

$$\begin{aligned}\frac{20}{(x-1)(x-2)(x+3)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}\\ &= \frac{A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+3)}\\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + ((A+2B-3C))x + (-6A-3B+2C)}{(x-1)(x-2)(x+3)}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B+C = 0\\ A+2B-3C = 0\\ -6A-3B+2C = 20\end{cases} \implies \{A=-5\,,B=4\,,C=1\}$$

Esercizio 5

Fattorizzazione

$$\frac{20}{(x-1)(x-2)(x+3)} = -\frac{5}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+3}$$

Integrazione

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{5}{x-1}\,dx + \int \frac{4}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+3}\,dx \\ &= -5\ln|x-1| + 4\ln|x-2| + \ln|x+3| + C \end{aligned}$$

Esercizio 6

> Calcolare $I = \int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$

Soluzione

Ricerca della fattorizzazione

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x(x+1)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases} \implies \{A=1\,, B=-1\,, C=-1\}$$

Esercizio 6

Fattorizzazione

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

Integrazione

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

Esercizio 7

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \frac{1}{x^3(x+1)^2}\,dx$

Soluzione

Ricerca della fattorizzazione

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3(x+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{(x+1)} + \frac{E}{(x+1)^2} \\
&= \frac{\left(Ax^2 + Bx + C\right)(x+1)^2 + \left(D(x+1) + E\right)x^3}{x^3(x+1)^2} \\
&= \frac{(A+D)x^4 + (2A+B+D+E)x^3 + (A+2B+C)x^2 + (B+2C)x + (C)}{x^3(x+1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
A + D = 0 \\
2A + B + D + E = 0 \\
A + 2B + C = 0 \\
B + 2C = 0 \\
C = 1
\end{cases} \implies \{A = 3\,, B = -2\,, C = 1\,, D = -3\,, E = -1\}$$

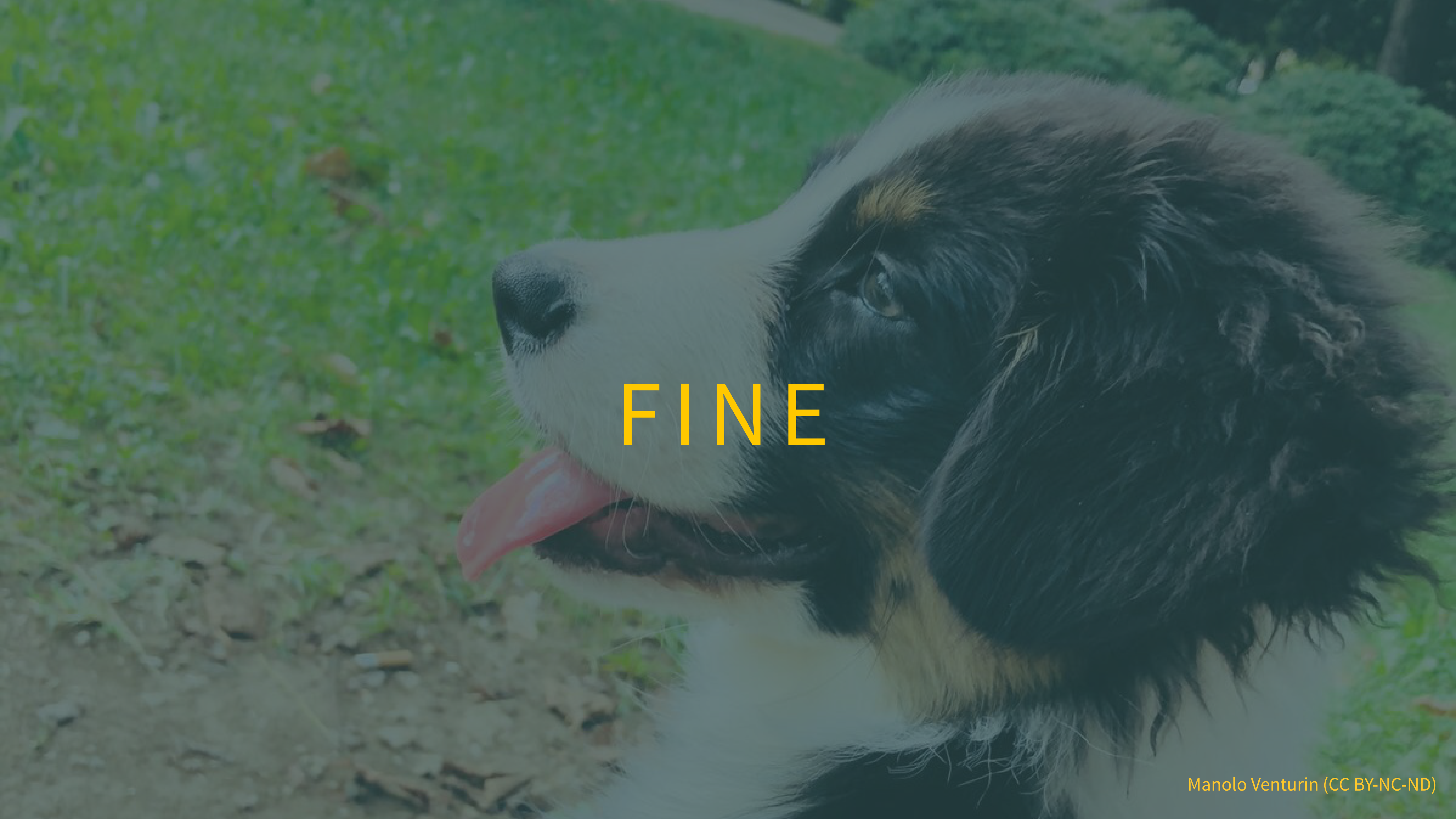
Esercizio 7

Fattorizzazione

$$\frac{1}{x^3(x+1)^2} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

Integrazione

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{2}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x^3}\,dx - \int \frac{3}{(x+1)}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= 3\ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} - 3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$


FINE