Fratti semplici
Fattori di primo grado

(Fratti semplici) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esempi

Calcolare

1. $\displaystyle\int \left(6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1\right)\, dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 + 1}\, dx$
3. $\displaystyle\int \frac{3}{x + 2}\, dx$
4. $\displaystyle\int \frac{3}{(x + 1)^2}\, dx$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{(x - 1)(x + 1)^2}\, dx$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Introduzione

Una **funzione razionale** $f(x)$ è il rapporto tra due polinomi $A(x)$ e $B(x)$:

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

con

- grado di $P(x) = m$
- grado di $Q(x) = n$

Analizziamo i diversi casi

Teorema fondamentale dell'algebra

Premessa

Per il teorema fondamentale dell'algebra, ogni polinomio a coefficienti reali può essere fattorizzato come prodotto

- di fattori lineari della forma $Ax + B$ o
- di fattori quadratici irriducibili della forma $Ax^2 + Bx + C$ (con $\Delta < 0$)

Quindi studiamo come integrare polinomi di

- grado 1
- grado 2 (prossima lezione)

Funzione razionale: integrale di un polinomio

Grado del denominatore è zero

In questo caso abbiamo

$$\int a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots a_1 x + a_0 =$$

$$\frac{a_m}{m+1}x^{m+1} + \frac{a_{m-1}}{m}x^m + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C$$

Esempio 1

> Calcolare $I = \int \left(6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1\right)\, dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \cancel{6}\,\frac{x^6}{\cancel{6}} + \cancel{5}\,\frac{x^5}{\cancel{5}} + \cancel{4}\,\frac{x^4}{\cancel{4}} + \cancel{3}\,\frac{x^3}{\cancel{3}} + \cancel{2}\,\frac{x^2}{\cancel{2}} + x + C \\ &= x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + C \end{aligned}$$

Funzione razionale: riduzione di grado

Grado del numeratore è maggiore o uguale al grado del denominatore

Se è $m \geqslant n$, si esegue la divisione (con Ruffini) di $A(x)$ per $B(x)$

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

con

- grado di $R(x)$ è minore (stretto) del grado di $B(x)$ (funzione razionale propria)
- grado di $Q(x) = m - n$

Nota: L'integrale di $Q(x)$ è immediato perché è un polinomio

Esempio 2 (con riduzione di grado)

> Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+1}{x^2+1}\,dx$

Soluzione

Essendo il grado del numeratore maggiore o uguale al grado del denominatore, eseguo la divisione tra i due polinomi

$$
\begin{array}{cccc|cc}
x^3 & +x^2 & -x & +1 & x^2 & +1 \\
\hline
-x^3 & & -x & & x & +1 \\
\hline
0 & +x^2 & -2x & & & \\
 & -x^2 & & -1 & & \\
\hline
 & 0 & -2x & 0 & &
\end{array}
$$

Quindi: $\underbrace{x^3+x^2-x+1}_{A(x)} = \underbrace{(x+1)}_{Q(x)} \cdot \underbrace{(x^2+1)}_{B(x)} + \underbrace{(-2x)}_{R(x)}$

Esempio 2 (con riduzione di grado)

$$\int \frac{x^3+x^2-x+1}{x^2+1}\,dx \quad , \quad x^3+x^2-x+1=(x+1)(x^2+1)+(-2x)$$

Da

$$\underbrace{\frac{x^3+x^2-x+1}{x^2+1}}_{\frac{A(x)}{B(x)}} = \underbrace{x+1}_{Q(x)} + \underbrace{\frac{-2x}{x^2+1}}_{\frac{R(x)}{B(x)}}$$

si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x^2-x+1}{x^2+1}\,dx &= \int (x+1)\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{(x+1)^2}{2} - \ln\left|1+x^2\right| + C\end{aligned}$$

Integrale della frazione propria

Una funzione razionale

1. è stata scomposta in una parte polinomiale (facile da integrare)
2. in una parte razionale $f(x) = \frac{R(x)}{B(x)}$ con:

- con grado di $R(x)$ minore (stretto) del grado di $B(x)$
- $B(x)$ monico, ovvero il coefficiente di grado massimo è 1 (se così non fosse la posso portare sempre fuori dall'integrale attraverso raccoglimento)
- Per il teorema fondamentale dell'algebra $B(x)$ è il prodotto di fattori lineari o quadratici irriducibili

Analizziamo i diversi casi (dal più semplice al più complesso)

Nota: Negli esempi i polinomi a denominatore sono sempre monici!

Denominatore lineare

Esempio 3

> Calcolare $I = \int \frac{3}{x+2}\,dx$

Soluzione

$$I \;=\; 3\int \frac{1}{x+2}\,dx \;=\; 3\ln|x+2|$$

In generale

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx \;=\; \ln|x-a| + C$$

Denominatore lineare elevato a potenza

Esempio 4

> Calcolare $\quad I = \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx$

Soluzione

$$I \;=\; 3\int (x+1)^{-2}\,dx \;=\; 3\,\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} \;=\; 3\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1} \;=\; -\frac{3}{x+1}$$

In generale

Usando il cambio di variabile si ha

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx \;=\; \int (x-a)^{-n}\,dx \;=\; \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} \;=\; -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$$

Scomposizione generale nel caso fattori lineari (ripetuti)

Regola generale di scomposizione

Ad **ogni fattore** lineare $ax+b$ che figuri n volte al denominatore (potenza di n) di una funzione razionale propria corrisponde ad una somma di n frazioni parziali della forma

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Esempio 5 (abbastanza comune)

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

Soluzione

Scrittura della fattorizzazione e relativo calcolo

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2+(2A+C)x+(A-B-C)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Per trovare le incognite, uguagliamo i termini di sinistra e destra delle due espressioni di sopra, arrivando a scrivere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=0 \\ (A-B-C)=1 \end{cases} \implies \left\{A=\frac{1}{4}\,, B=-\frac{1}{4}\,, C=-\frac{1}{2}\right\}$$

Esempio 5 (abbastanza comune)

Fattorizzazione finale

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}$$

Integrazione

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} + C\end{aligned}$$


FINE