Formule di riduzione Esercizi #1

(Integrazione per parti) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indici degli esercizi

1. Scrivere la formula ricorsiva per $I_n = \int \cos^n x \, dx$ per $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 1$ e valutare successivamente:
   2. $I_4 = \int \cos^4 x \, dx$
   3. $I_3 = \int \cos^3 x \, dx$

- $\left[I_n = \frac{\cos^{n-1} x \cdot \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}\right]$
- $\left[I_4 = \frac{\cos^3 x \cdot \sin x}{4} + \frac{3}{8} \cos x \cdot \sin x + \frac{3}{8} x\right]$
- $\left[I_3 = \frac{\cos^2 x \cdot \sin x}{3} + \frac{2}{3} \sin x\right]$

4. Usando la formula di riduzione, calcolare $\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \, dx$
   - $\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Soluzione

Esercizio 1

> Scrivere la formula ricorsiva per $I_n = \int \cos^n x \, dx$ per $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 1$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx = \begin{pmatrix} u = \cos^{n-1} x, & u' = -(n-1)\cos^{n-2} x \cdot \sin x \\ v' = \cos x, & v = \sin x \end{pmatrix} \\
&= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x \, dx \\
&= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x \, dx) \\
&= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx
\end{aligned}
$$

Esercizio 1

Da

$$\begin{aligned} I_n &= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

si ha, isolando I_n,

$$I_n = \frac{\cos^{n-1} x \cdot \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Esercizio 2

> Valutare $\quad I_4 = \int \cos^4 x \, dx$

Soluzione

Da

$$I_n = \frac{\cos^{n-1} x \cdot \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

si ha

- $I_4 = \frac{\cos^3 x \cdot \sin x}{4} + \frac{3}{4} I_2$
- $I_2 = \frac{\cos x \cdot \sin x}{2} + \frac{1}{2} I_0$
- $I_0 = \int 1 \, dx = x$

Esercizio 2

- $I_4 = \frac{\cos^3 x \cdot \sin x}{4} + \frac{3}{4} I_2$
- $I_2 = \frac{\cos x \cdot \sin x}{2} + \frac{1}{2} I_0$
- $I_0 = \int 1 \, dx = x$

Si ha

$$I_4 = \frac{\cos^3 x \cdot \sin x}{4} + \frac{3}{8} \cos x \cdot \sin x + \frac{3}{8} x$$

Esercizio 3

> Valutare $I_3 = \int \cos^3 x \, dx$

Soluzione

Da

$$I_n = \frac{\cos^{n-1} x \cdot \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

si ha

- $I_3 = \frac{\cos^2 x \cdot \sin x}{3} + \frac{2}{3} I_1$
- $I_1 = \int \cos x \, dx = \sin x$

Esercizio 3

- $I_3 = \frac{\cos^2 x \cdot \sin x}{3} + \frac{2}{3} I_1$
- $I_1 = \int \cos x \, dx = \sin x$

Si ha

$$I_3 = \frac{\cos^2 x \cdot \sin x}{3} + \frac{2}{3} \sin x$$

Esercizio 4

> Usando la formula di riduzione, calcolare $I = \int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$

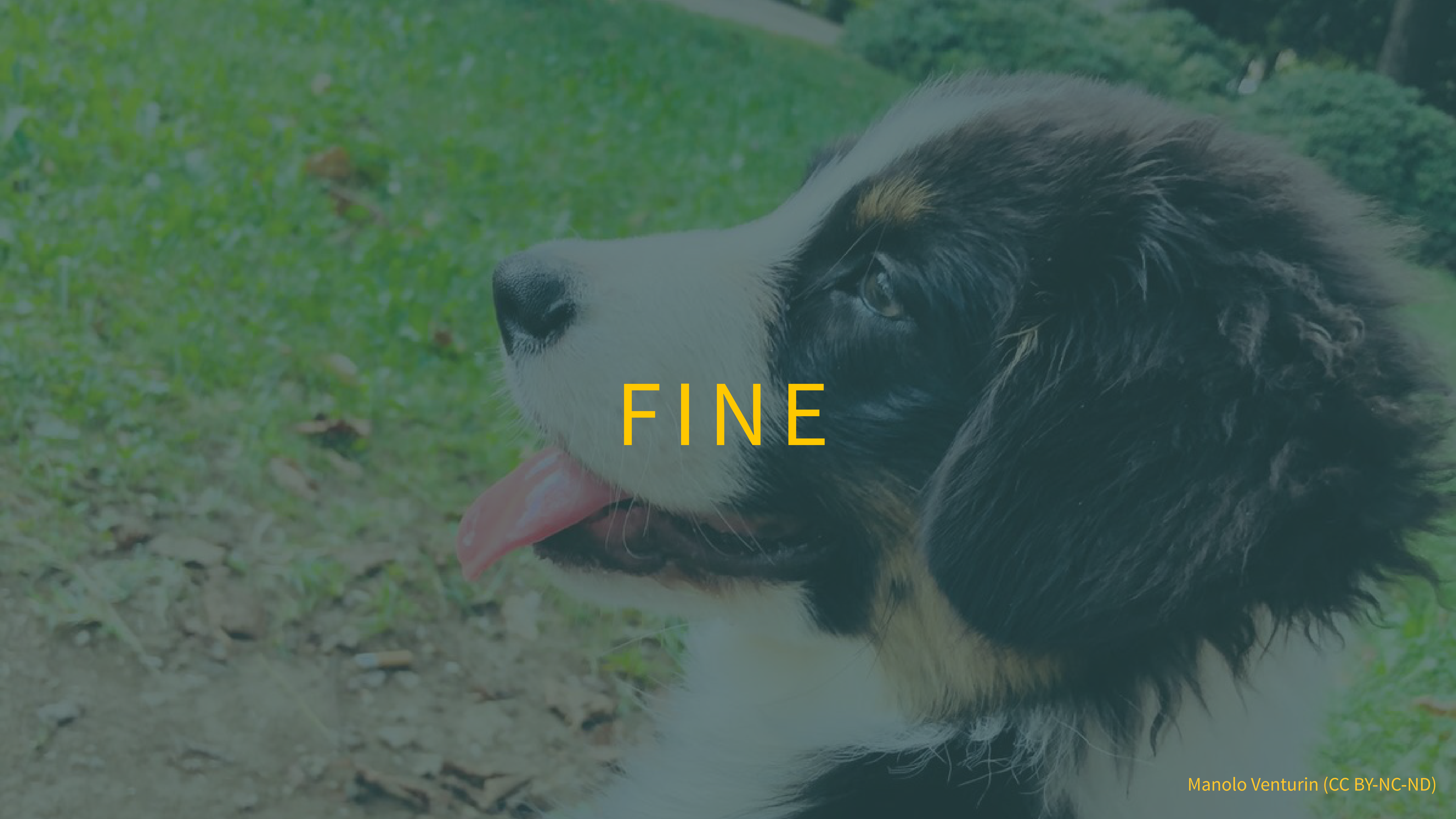
Soluzione

Usiamo la formula di riduzione per $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right]$$

con $n = 3/2$, si ha

$$I = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} + 0 \cdot I_{1/2} \;=\; \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}}$$


FINE