Formule di riduzione o ricorsive

(Integrazione per parti) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esempi

Calcolare

1. $I_n = \int x^n e^x \, dx$
2. $I_3 = \int x^3 e^x \, dx$
3. $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$ per $n \neq -1$
4. $I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$
5. $I_3 = \int \frac{1}{(1+x^2)^3} \, dx$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Formule di riduzione / ricorsive

Permette di ridurre il calcolo dell'integrale ad un integrale più facile

- Sono degli integrali fondamentali espressi in forma ricorsiva
- Sono ottenuti dall'applicazione della regola di integrazione per parti
- Sono poco usati negli esecizi d'esame

Esempi

Esempio 1

> Scrivere la formula ricorsiva per $I_n = \int x^n e^x \, dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I_n &= \begin{pmatrix} u = x^n, & u' = nx^{n-1} \\ v' = e^x, & v = e^x \end{pmatrix} = x^n e^x - \int nx^{n-1} e^x \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \\ &= x^n e^x - nI_{n-1} \end{aligned}$$

Esempio 2

> Valutare $I_3 = \int x^3 e^x \, dx$

Soluzione

Si ha

- $I_n = \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - nI_{n-1}$ (formula ricorsiva)
- $I_0 = \int e^x \, dx = e^x$ (passo iniziale)

Quindi

$$\begin{aligned} I_3 &= \int x^3 e^x = x^3 e^x - 3I_2 = x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2I_1\right) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6I_1 \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\left(xe^x - I_0\right) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C \end{aligned}$$

Esempio 3

> Scrivere la formula ricorsiva per $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$ per $n \neq -1$

Suggerimento

Partire da valutare I_{n-1} e integrare per parti

Esempio 3

Soluzione

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \quad , \quad I_{n-1} = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx$$

Partiamo da I_{n-1} per poi isolare I_n (dobbiamo abbassare di grado il denominatore)

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \begin{pmatrix} u = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} = (1+x^2)^{-(n-1)}, & u' = -(n-1)(1+x^2)^{-n} \cdot 2x \\ v' = 1, & v = x \end{pmatrix} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx \end{aligned}$$

Esempio 3

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^n}\,dx \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx - 2(n-1)\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1}\,dx - 2(n-1)I_n\,dx
\end{aligned}$$

da cui, isolando I_n si ha

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right]$$

Esempio 4

> Valutare $I_2 = \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\, dx$

Soluzione

Si ha

- $I_n = \frac{1}{2(n-1)} \left[\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{n-1}} + (2n-3) I_{n-1} \right]$ (formula ricorsiva)
- $I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x$ (passo iniziale)

Quindi

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2(2-1)} \left[\frac{x}{(1+x^2)^1} + (4-3) I_1 \right] = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} I_1 \\
&= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C
\end{aligned}
$$

Esempio 5

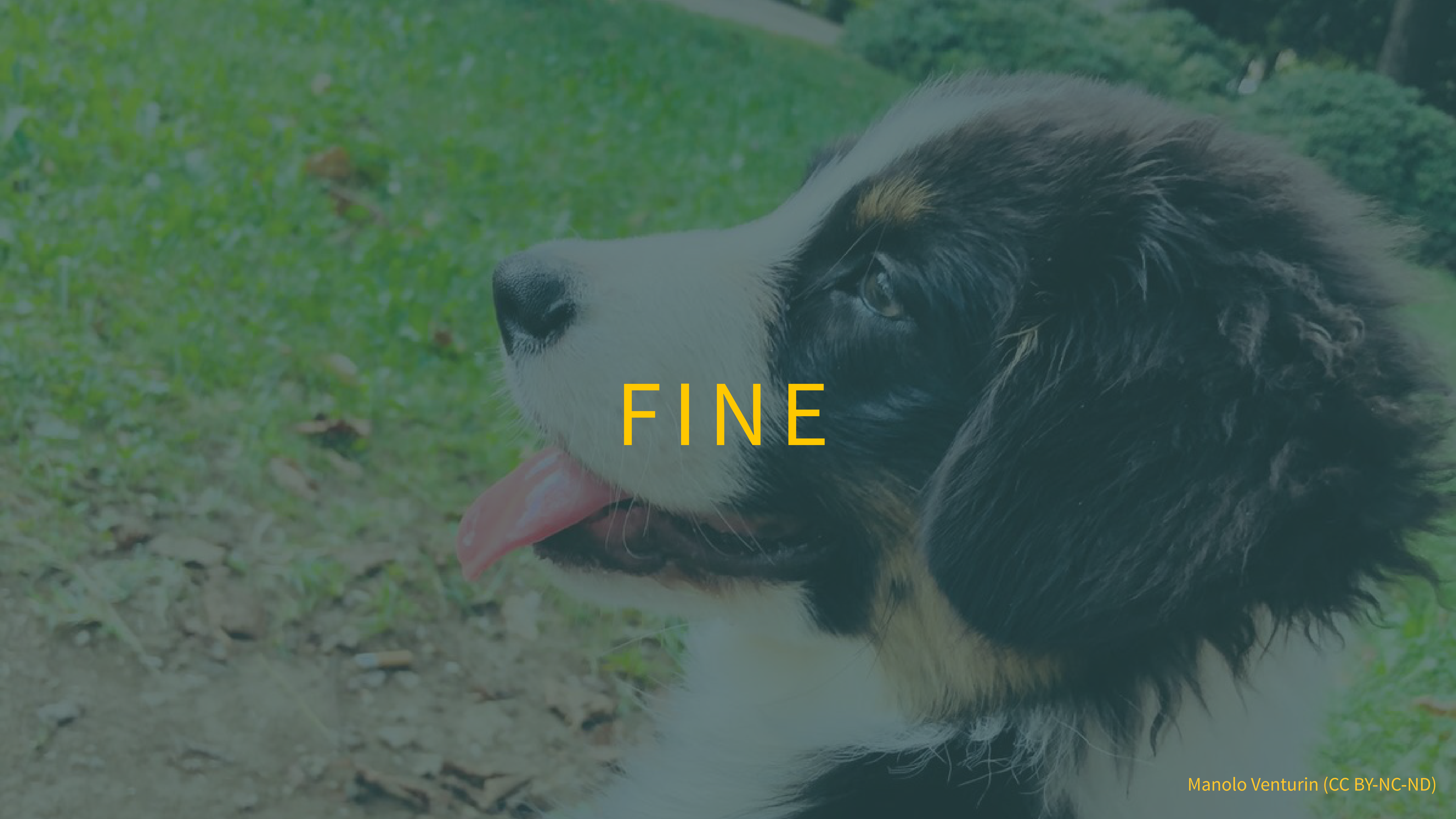
> Valutare $\quad I_3 = \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^3}\, dx$

Soluzione

Si ha

- $I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right]$ (formula ricorsiva)
- $I_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x$ (esempio precedente / passo iniziale)

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2(3-1)}\left[\frac{x}{(1+x^2)^2} - (6-3)I_2\right] = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}I_2 \\ &= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x\right] = \frac{(5+3x^2)x}{8(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\arctan x \end{aligned}$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)