Integrazione per parti
Esercizi #2

(Integrazione per parti) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizi

Calcolare

1. $\int x^2 \sin x \, dx \quad = \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \right]$
2. $\int x^2 \cos x \, dx \quad = \left[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \right]$
3. $\int e^x \cos x \, dx \quad = \left[\left(\frac{\sin x + \cos x}{2} \right) e^x + C \right]$
4. $\int e^{-x} \sin x \, dx \quad = \left[-e^{-x} \left(\frac{\sin x + \cos x}{2} \right) + C \right]$
5. $\int x \arctan x \, dx \quad = \left[\frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C \right]$
6. $\int \arctan \sqrt{x} \, dx \quad = \left[x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C \right]$
7. $\int \arcsin x \, dx \quad = \left[x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C \right]$
8. $\int \arccos x \, dx \quad = \left[x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C \right]$

Se vi piace iscrivetevi al canale e mettete un mi piace

Soluzione

Esercizio 1

> Calcolare $\quad I = \int x^2 \sin x \, dx$

Soluzione

Dall'esempio 6 della teoria abbiamo visto che :

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} u = x^2, & u' = 2x \\ v' = \sin x, & v = -\cos x \end{pmatrix} = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) \; = \; -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

Esercizio 2

> Calcolare $\quad I = \int x^2 \cos x \, dx$

Soluzione

Dall'esempio 5 della teoria abbiamo visto che :

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} u = x^2, & u' = 2x \\ v' = \cos x, & v = \sin x \end{pmatrix} = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \end{aligned}$$

Esercizio 3

Calcolare $\quad I = \int e^x \cos x \, dx$

Soluzione

$$\int e^x \cos x \, dx = \begin{pmatrix} u = \cos x, & u' = -\sin x \\ v' = e^x, & v = e^x \end{pmatrix} = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \begin{pmatrix} u = \sin x, & u' = \cos x \\ v' = e^x, & v = e^x \end{pmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

La soluzione si ottiene sostituendo la seconda formula nella prima e risolvendo l'equazione che ne risulta

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\implies 2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x \implies \int e^x \cos x \, dx = \left(\frac{\sin x + \cos x}{2} \right) e^x + C$$

Esercizio 4

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int e^{-x} \sin x \, dx$

Soluzione

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = \begin{pmatrix} u = \sin x, & u' = \cos x \\ v' = e^{-x}, & v = -e^{-x} \end{pmatrix} = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x \, dx$$

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = \begin{pmatrix} u = \cos x, & u' = -\sin x \\ v' = e^{-x}, & v = -e^{-x} \end{pmatrix} = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x \, dx$$

$$\begin{aligned} \implies \quad \int e^{-x} \sin x \, dx &= -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x \\ &= -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x \, dx \end{aligned}$$

$$\implies \quad 2 \int e^{-x} \sin x \, dx = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x$$

$$\implies \quad \int e^{-x} \sin x \, dx = -e^{-x} \left(\frac{\sin x + \cos x}{2} \right) + C$$

Esercizio 5

> Calcolare $\quad I = \int x \arctan x \, dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = \arctan x, & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = x, & v = \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int 1 \, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x = \frac{1}{2}\big((x^2+1)\arctan x - x\big) + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 6

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx$

Soluzione

Dall'esercizio 5 si ha $\int x \arctan x\,dx \;=\; \frac{1}{2}\left((x^2+1)\arctan x - x\right)$ quindi si ha

$$
\begin{aligned}
I \;&=\; \left(\begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \dfrac{1}{2t}\,dx \end{array}\right) \;=\; 2\int t \arctan t\,dt \\
&= (t^2+1)\arctan t - t \\
&= (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 7

> Calcolare $I = \int \arcsin x \, dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \int 1 \cdot \arcsin x \, dx \\
&= \begin{pmatrix} u = \arcsin x, & u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1, & v = x \end{pmatrix} = x \arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x \, dx \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \\
&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 8

> Calcolare $I = \int \arccos x \, dx$

Soluzione (Metodo 1)

$$
\begin{aligned}
I &= \int 1 \cdot \arccos x \, dx \\
&= \begin{pmatrix} u = \arccos x, & u' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1, & v = x \end{pmatrix} = x \arccos x + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x \, dx \\
&= x \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arccos x - \frac{1}{2} \frac{\left(1-x^2\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \\
&= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 8

Soluzione (Metodo 2)

Dalla relazione

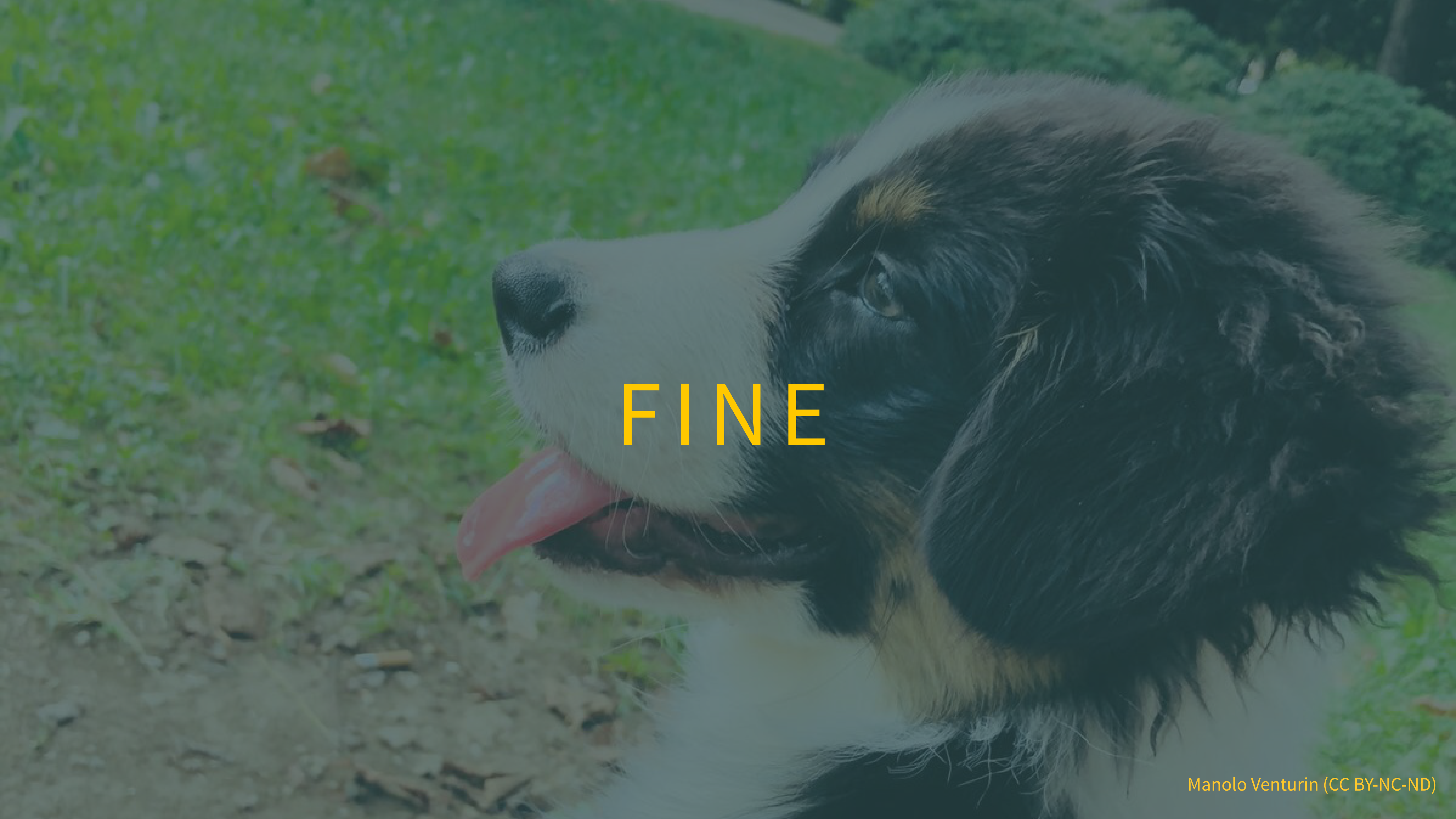
$$\arcsin x + \arccos x \;=\; \frac{\pi}{2}$$

e dal risultato dell'integrale precedente

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$

si ha

$$\begin{aligned}
I &= \int \arccos x \, dx = \int \frac{\pi}{2} \, dx - \int \arcsin x \, dx \\
&= \frac{\pi}{2} x - \left(x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} \right) \;=\; \frac{\pi}{2} x - x \arcsin x - \sqrt{1 - x^2} \\
&= x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x \right) - \sqrt{1 - x^2} \\
&= x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}
\end{aligned}$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)