Integrazione per parti
Esercizi #1

(Integrazione per parti) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizi

Calcolare

1. $\int xe^{-x}\,dx \qquad = \left[-(x+1)e^{-x}+C\right]$
2. $\int x^2e^{-x}\,dx \qquad = \left[-(x^2+2x+2)e^{-x}+C\right]$
3. $\int xe^{3x}\,dx \qquad = \left[\frac{1}{9}(3x-1)e^{3x}+C\right]$
4. $\int \ln(x+1)\,dx \qquad = \left[(x+1)(\ln|x+1|-1)+C\right]$
5. $\int x\ln x\,dx \qquad = \left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C\right]$
6. $\int x^2\ln x\,dx \qquad = \left[\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+C\right]$
7. $\int x\ln\left(x^2+1\right)dx \qquad = \left[\frac{(x^2+1)}{2}(\ln(x^2+1)-1)+C\right]$
8. $\int \ln^2 x\,dx \qquad = \left[x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C\right]$

Se vi piace iscrivetevi al canale e mettete un mi piace

Soluzione

Esercizio 1

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int x e^{-x}\, dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = e^{-x}, & v = -e^{-x} \end{pmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx \\
&= -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x} + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

> Calcolare $I = \int x^2 e^{-x}\,dx$

Soluzione

Dall'esercizio 1 si ha $\int xe^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x}$ e quindi

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = x^2, & u' = 2x \\ v' = e^{-x}, & v = -e^{-x} \end{pmatrix} = -x^2 e^{-x} + \int 2xe^{-x}\,dx \\
&= -x^2 e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} \\
&= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

> Calcolare $I = \int xe^{3x}\,dx$

Soluzione

Dall'esempio 1 della teoria si ha $\int xe^x\,dx = (x-1)e^x$ e quindi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int 3xe^{3x}\,dx \\ &= \left(\begin{array}{c} t = 3x \\ dt = 3\,dx \end{array}\right) = \frac{1}{9}\int te^t\,dt \\ &= \frac{1}{9}(t-1)e^t \\ &= \frac{1}{9}(3x-1)e^{3x} + C \end{aligned}$$

Esercizio 4

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \ln(x+1)\, dx$

Soluzione

Dall'esempio 3 della teoria si ha $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1)$ e quindi

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{pmatrix} = \int \ln t \, dt \\ &= t(\ln|t| - 1) = (x+1)\big(\ln|x+1| - 1\big) + C \end{aligned}$$

Esercizio 5

> Calcolare $I = \int x \ln x \, dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} u = \ln x, & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x, & v = \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C \end{aligned}$$

Esercizio 6

> Calcolare $\quad I = \int x^2 \ln x \, dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} u = \ln x, & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^2, & v = \frac{x^3}{3} \end{pmatrix} = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C \end{aligned}$$

Esercizio 7

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int x \ln\left(x^2+1\right)\, dx$

Soluzione

Dall'esempio 3 della teoria si ha $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1)$ e quindi

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2x\, dx \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \ln t \, dt \\ &= \frac{t}{2}(\ln|t| - 1) \\ &= \frac{(x^2+1)}{2}\big(\ln\left(x^2+1\right) - 1\big) + C \end{aligned}$$

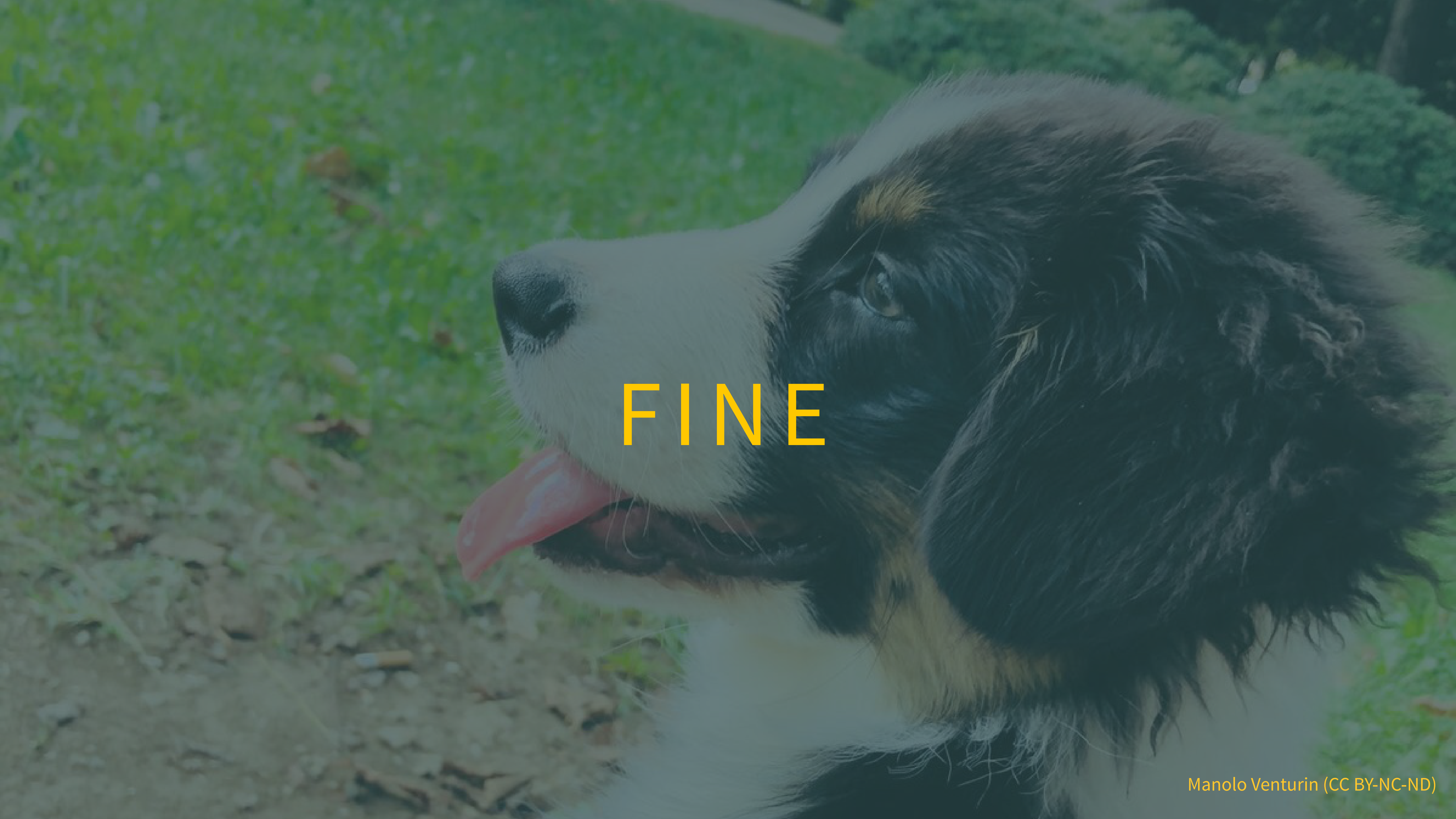
Esercizio 8

> Calcolare $I = \int \ln^2 x \, dx$

Soluzione

Dall'esempio 3 della teoria si ha $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1)$ e quindi

$$
\begin{aligned}
I &= \int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \\
&= \begin{pmatrix} u = \ln^2 x, & u' = 2\frac{\ln x}{x} \\ v' = 1, & v = x \end{pmatrix} = x \ln^2 x - \int \cancel{x}\, 2 \frac{\ln x}{\cancel{x}} \, dx \\
&= x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx = x \ln^2 x - 2x(\ln x - 1) \\
&= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C
\end{aligned}
$$


FINE