Integrazione per parti
Teoria

(Integrazione per parti) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Indice degli esempi

Calcolare

1. $\displaystyle\int xe^x \, dx$
2. $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$
3. $\displaystyle\int \ln x \, dx$
4. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$
5. $\displaystyle\int x \sin x \, dx$
6. $\displaystyle\int x \cos x \, dx$
7. $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx$
8. $\displaystyle\int \arctan x \, dx$

Se vi piace iscrivetevi al canale e mettete un mi piace

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Teorema: Integrazione per parti

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue con le loro derivate prime, allora vale la formula

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

- $f(x)$ si chiama *fattore finito*
- $g'(x)$ si chiama *fattore differenziale*

Nota: Nella risoluzione dei problemi utilizzeremo la notazione compatta:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Dimostrazione

Segue dalla formula di derivazione del prodotto di due funzioni

$$\begin{aligned}
\big(f(x)g(x)\big)' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\implies \quad f(x)g'(x) &= \big(f(x)g(x)\big)' - f'(x)g(x) \\
\implies \quad \int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx
\end{aligned}$$

Casi notevoli:

- Polinomio per esponenziale
- Polinomio per logaritmo
- Polinomio per funz. trigonometrica
- Esponenziale per funz. trigonometrica
- Polinomio per funz. trig. inversa

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Polinomio per esponenziale

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Teoria

Forma tipica:

$$\int P(x)e^x \, dx$$

Integrazione per parti:

- $u = P(x) \implies u' = P'(x)$ (abbasso di grado il polinomio)
- $v' = e^x \implies v = e^x$
- $\int \underbrace{P(x)}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx = \underbrace{P(x)}_{u} \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{P'(x)}_{u'} \underbrace{e^x}_{v} dx$

Nota: L'integrale risultante è più facile perché la parte polinomiale è diminuita di grado

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 1

Calcolare $\int x e^x \, dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = e^x, & v = e^x \end{pmatrix} = x e^x - \int e^x \, dx \\
&= x e^x - e^x = (x-1)e^x + C
\end{aligned}
$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

> Calcolare $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$

Soluzione

Dall'esercizio precedente: $\int xe^x \, dx = (x-1)e^x + C$

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = x^2, & u' = 2x \\ v' = e^x, & v = e^x \end{pmatrix} = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx = x^2 e^x - 2\int xe^x \, dx \\
&= x^2 e^x - 2(x-1)e^x = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x + C
\end{aligned}
$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Polinomio per logaritmo

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Teoria

Forma tipica:

$$\int P(x)\ln x\,dx$$

Integrazione per parti:

- $u = \ln x \quad \Longrightarrow \quad u' = \frac{1}{x}$
- $v' = P(x) \quad \Longrightarrow \quad v = \int P(x)\,dx = \Phi(x)$ (facile da calcolare perché è un polinomio)
- $\int \underbrace{P(x)}_{v'}\underbrace{\ln x}_{u}\,dx \;=\; \underbrace{\Phi(x)}_{v}\underbrace{\ln x}_{u} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\underbrace{\Phi(x)}_{v}\,dx$

Nota: L'integrale risultante è più facile perché non compare più il logaritmo e l'espressione finale è razionale in x

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 3

> Calcolare $\int \ln x \, dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \int 1 \cdot \ln x \, dx \\ &= \begin{pmatrix} u = \ln x, & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1, & v = x \end{pmatrix} = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx \\ &= x \ln x - x = x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 4

Calcolare $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = \ln x, & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^{-2}, & v = -\frac{1}{x} \end{pmatrix} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \\
&= -\frac{\ln x + 1}{x} + C
\end{aligned}
$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Polinomio per funz. trigonometrica

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Teoria

Forma tipica:

$$\int P(x)\sin x\,dx$$

Integrazione per parti:

- $u = P(x) \implies u' = P'(x)$ (abbasso di grado il polinomio)
- $v' = \sin x \implies v = -\cos x$
- $\int \underbrace{P(x)}_{u}\underbrace{\sin x}_{v'}\,dx = -\underbrace{P(x)}_{u}\underbrace{\cos x}_{v} + \int \underbrace{P'(x)}_{u'}\underbrace{\cos x}_{v}\,dx$

Nota: L'integrale risultante è più facile perché la parte polinomiale è diminuita di grado

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 5

> Calcolare $\displaystyle\int x \sin x \, dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = \sin x, & v = -\cos x \end{pmatrix} = -x\cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 6

Calcolare $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = \cos x, & v = \sin x \end{pmatrix} = x\sin x - \int \sin x\,dx \\ &= x\sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esponenziale per funz. trigonometrica

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Teoria

Forma tipica:

$$\int e^x \sin x \, dx$$

Integrazione per parti:

- $u = \sin x \implies u' = \cos x$
- $v' = e^x \implies v = e^x$
- $\int \underbrace{e^x}_{v'} \underbrace{\sin x}_{u} dx = \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{\sin x}_{u} - \int \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{\cos x}_{u'} dx$

Nota: Devo integrare per parti due volte per ottenere un integrale simile a quello di partenza e quindi risolvere l’equazione che ne risulta

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 7

> Calcolare $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx$

Soluzione

$$\int e^x \sin x \, dx \;=\; \begin{pmatrix} u = \sin x, & u' = \cos x \\ v' = e^x, & v = e^x \end{pmatrix} \;=\; e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\int e^x \cos x \, dx \;=\; \begin{pmatrix} u = \cos x, & u' = -\sin x \\ v' = e^x, & v = e^x \end{pmatrix} \;=\; e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

La soluzione si ottiene sostituendo la seconda formula nella prima e risolvendo l'equazione che ne risulta

$$\int e^x \sin x \, dx \;=\; e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \;=\; e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 7

$$\int e^x \sin x \, dx \;=\; e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

Si ha

$$\implies \quad 2 \int e^x \sin x \, dx \;=\; e^x \sin x - e^x \cos x$$

da cui

$$\implies \quad \int e^x \sin x \, dx \;=\; \left(\frac{\sin x - \cos x}{2} \right) e^x + C$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Polinomio per funz. trig. inversa

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Teoria

Forma tipica:

$$\int P(x) \arctan x \, dx$$

- $u = \arctan x \quad \Longrightarrow \quad u' = \frac{1}{1+x^2}$
- $v' = P(x) \quad \Longrightarrow \quad \int P(x)\, dx = \Phi(x)$ (facile da calcolare perché è un polinomio)
- $\int \underbrace{P(x)}_{v'} \underbrace{\arctan x}_{u} \, dx \; = \; \underbrace{\Phi(x)}_{v} \underbrace{\arctan x}_{u} - \int \underbrace{\Phi(x)}_{v} \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{u'} \, dx$

Nota: L'integrale risultante è più facile perché ho ridotto l'integrale ad un'espressione razionale in x

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 8

Calcolare $\displaystyle\int \arctan x \, dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \int 1 \cdot \arctan x \, dx \\
&= \begin{pmatrix} u = \arctan x, & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = 1, & v = x \end{pmatrix} = x \arctan x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x \, dx \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C
\end{aligned}
$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)