Funzioni trigonometriche Esercizi #5

(Integrali indefiniti elementari) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizi

Calcolare

1. $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,dx \qquad = \left[\ln\left|\arctan x\right| + C\right]$
2. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad = \left[\frac{1}{2}\arcsin^2 x + C\right]$
3. $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx \qquad = \left[\frac{1}{2}x + \arctan x + C\right]$
4. $\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x}\,dx \qquad = \left[\ln|x| + \arctan x + C\right]$
5. $\int \frac{2}{1+2x^2}\,dx \qquad = \left[\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}x\right) + C\right]$
6. $\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx \qquad = \left[\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{3}{2}x\right) + C\right]$
7. $\int \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx \qquad = \left[\arcsin\left(3x\right) + C\right]$
8. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad = \left[-\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C\right]$
9. $\int \frac{3}{\sqrt{2-9x^2}}\,dx \qquad = \left[\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{2}}x\right) + C\right]$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Soluzione

Esercizio 1

> Calcolare $I = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = \arctan x \\ du = \frac{1}{(1+x^2)}\,dx \end{pmatrix} = \int \frac{1}{u}\,du \\
&= \ln|u| \\
&= \ln\left|\arctan x\right| + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

> Calcolare $I = \displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = \arcsin x \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \end{pmatrix} = \int u\,du \\
&= \frac{u^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}\arcsin^2 x + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

> Calcolare $\quad I = \int \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx$

Soluzione

Applichiamo la riduzione di grado tra il numeratore e il denominatore

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{(x^2+1)+1}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= x + \arctan x + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

Calcolare $I = \int \frac{x^2+x+1}{x^3+x}\,dx$

Soluzione

- Applichiamo la riduzione di grado tra il numeratore e il denominatore
- Riscriviamo il numeratore in ordine diverso evidenziando i termini del denominatore

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x^2+1)+x}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln|x| + \arctan x + C \end{aligned}$$

Esercizio 5

> Calcolare $I = \int \frac{2}{1+2x^2}\,dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2}\,dx \\
&= \begin{pmatrix} u = \sqrt{2}x \\ du = \sqrt{2}\,dx \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= \sqrt{2}\arctan u \\
&= \left(u = \sqrt{2}x \right) = \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}x\right) + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 6

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{4\left(1+\frac{9}{4}x^2\right)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{3}{2}x)^2}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{\frac{3}{2}}{1+(\frac{3}{2}x)^2}\,dx \\
&= \begin{pmatrix} u = \frac{3}{2}x \\ du = \frac{3}{2}\,dx \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= \frac{1}{6}\arctan u \\
&= \left(u = \tfrac{3}{2}x\right) = \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{3}{2}x\right) + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 7

> Calcolare $I = \displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}\,dx \\ &= \begin{pmatrix} u = 3x \\ du = 3\,dx \end{pmatrix} \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \;=\; \arcsin u \\ &= (\,u = 3x\,) \;=\; \arcsin(3x) + C \end{aligned}$$

Esercizio 8

> Calcolare $I = \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Soluzione

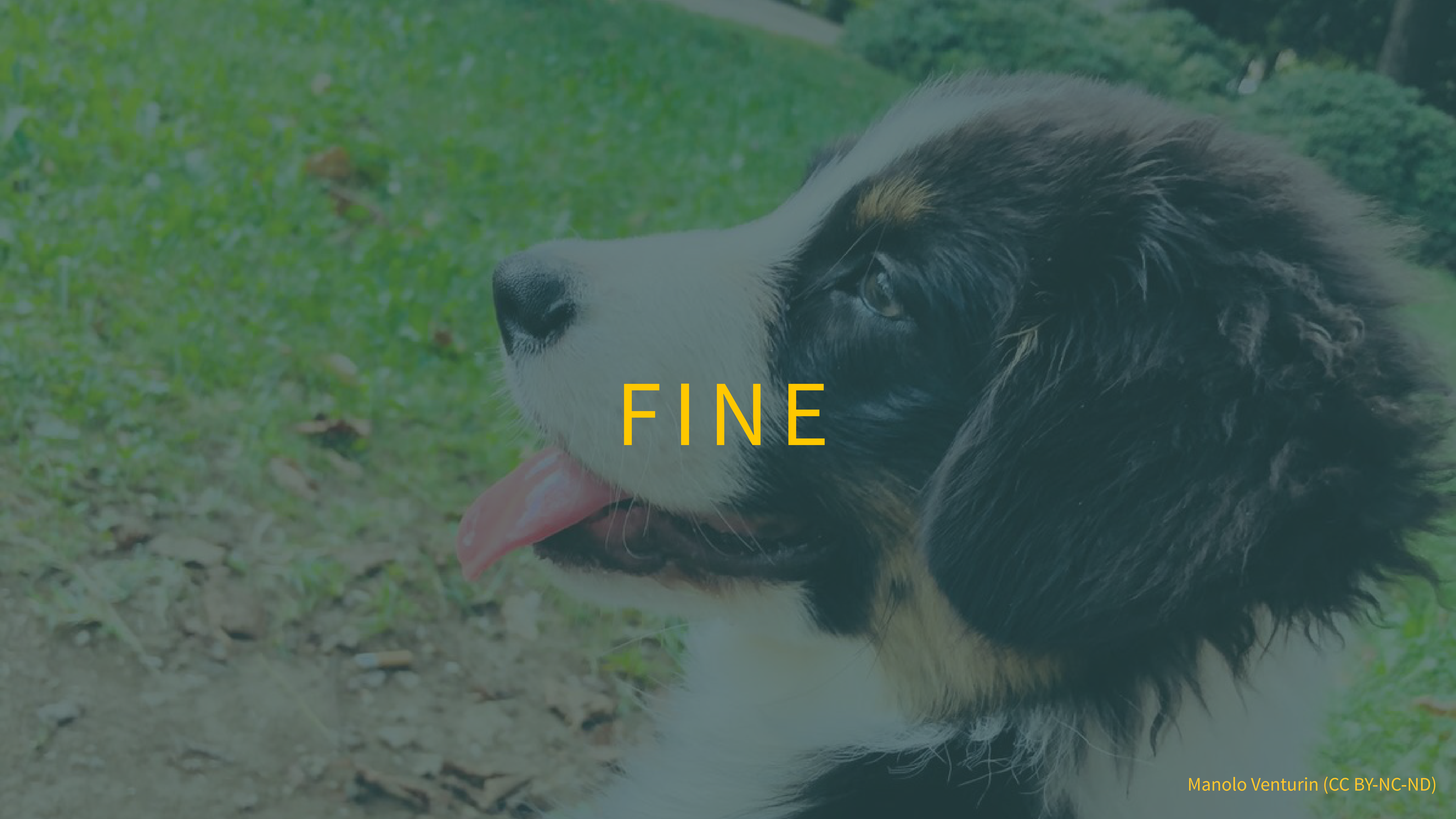
$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \arcsin x \\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \arcsin x \\
&= -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 9

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{2-9x^2}}\,dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}x\right)^2}}\,dx \\
&= \left(\begin{aligned} u &= \frac{3}{\sqrt{2}}x \\ du &= \frac{3}{\sqrt{2}}\,dx \end{aligned}\right) = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\
&= \arcsin u \\
&= \left(u = \frac{3}{\sqrt{2}}x\right) = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{2}}x\right) + C
\end{aligned}
$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)