

Funzioni trigonometriche Teoria

(Integrali indefiniti elementari) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Indice degli esempi

Calcolare

$$1. I = \int \sin(1 - 2x) dx$$

$$2. I = \int \sin^3 x dx$$

$$3. I = \int \tan x dx$$

$$4. I = \int 4 \sin^2 x dx$$

$$5. I = \int \frac{2}{\sin^2 x} dx$$

$$6. I = \int \sin x \cos x dx$$

$$7. I = \int \frac{1}{1 + 9x^2} dx$$

**Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento**

# Integrale delle funzioni trigonometriche

## Base

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

## Versione generalizzata

$$\int \sin f(x) \cdot f'(x) \, dx = \left( \begin{array}{l} u = f(x) \\ du = f'(x) \, dx \end{array} \right) = \int \sin u \, du = -\cos u = -\cos f(x)$$

$$\int \cos f(x) \cdot f'(x) \, dx = \left( \begin{array}{l} u = f(x) \\ du = f'(x) \, dx \end{array} \right) = \int \cos u \, du = \sin u = \sin f(x)$$

# Integrale delle funzioni trigonometriche

## Base

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$$

## Generalizzato

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \left( \begin{array}{l} u = f(x) \\ du = f'(x) dx \end{array} \right) = \int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u = \tan f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = \left( \begin{array}{l} u = f(x) \\ du = f'(x) dx \end{array} \right) = \int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u = -\cot f(x)$$

# Integrale delle funzioni trigonometriche inverse

## Base

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

## Generalizzato

$$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \left( \begin{array}{l} u = f(x) \\ du = f'(x) dx \end{array} \right) = \int \frac{1}{1+u^2} du = \arctan u = \arctan f(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \left( \begin{array}{l} u = f(x) \\ du = f'(x) dx \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u = \arcsin f(x)$$

# Relazioni trigonometriche comuni

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
- $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
- $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$
- $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$
- $1 \pm \sin x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $1 + \cot^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$
- $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

# Esempi

# Esempio 1

Calcolare  $I = \int \sin(1 - 2x) dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \left( \begin{array}{l} u = 1 - 2x \\ du = -2 dx \end{array} \right) = -\frac{1}{2} \int \sin u du \\ &= \frac{1}{2} \cos u \\ &= (u = 1 - 2x) = \frac{1}{2} \cos(1 - 2x) \\ &= \frac{1}{2} \cos(2x - 1) + C \end{aligned}$$

# Esempio 2

Calcolare  $I = \int \sin^3 x \, dx$

## Soluzione

Da  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  si ha

$$I = \int \sin^2 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \underbrace{\int \sin x \, dx}_A - \underbrace{\int \cos^2 x \sin x \, dx}_B = A - B$$

- $A = \int \sin x \, dx = -\cos x$
- $B = \int \cos^2 x \sin x \, dx = \left( \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{array} \right) = -\int u^2 \, du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{\cos^3 x}{3}$
- $A - B = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$

# Esempio 3

Calcolare  $I = \int \tan x \, dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= \left( \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x \, dx \end{array} \right) = - \int \frac{1}{u} \, du \\ &= -\ln |u| \\ &= (u = \cos x) = -\ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

# Esempio 4

Calcolare  $I = \int 4 \sin^2 x \, dx$

## Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \left( \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \right) = 4 \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx \\ &= 2x - \int 2 \cos(2x) \, dx \\ &= 2x - \sin(2x) + C \end{aligned}$$

**Nota:** L'idea è sempre quella di ricondurmi ad argomenti lineari in seno e coseno

# Esempio 5

Calcolare  $I = \int \frac{2}{\sin^2 x} dx$

Soluzione

$$I = 2 \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = -2 \cot x + C$$

# Esempio 6

Calcolare  $I = \int \sin x \cos x \, dx$

Soluzione

$$I = \left( \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{array} \right) = \int u \, du = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2}(\sin x)^2 = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

# Esempio 7

Calcolare  $I = \int \frac{1}{1 + 9x^2} dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1 + (3x)^2} dx \\ &= \left( \begin{array}{l} u = 3x \\ du = 3 dx \end{array} \right) = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{3} \arctan u \\ &= (u = 3x) = \frac{1}{3} \arctan(3x) + C \end{aligned}$$

A close-up profile of a dog's head, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue out. The image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the middle of the dog's face.

FINE