

Esponenziale — Teoria

(Integrali indefiniti elementari) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Indice degli esempi

Calcolare

$$1. I = \int (2e^x + 2^x) dx$$

$$2. I = \int xe^{2x^2} dx$$

$$3. I = \int (e^{2x} + e^{-x}) dx$$

$$4. I = \int \frac{(1 + e^{-x})^2}{e^x} dx$$

$$5. I = \int \frac{(1 + e^{-x})^2}{e^{-x}} dx$$

$$6. I = \int \frac{\ln x}{2x} dx$$

**Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento**

# Integrale di un'esponenziale

## Base

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \int e^{\ln ax} dx = \frac{1}{\ln a} \int e^{\ln ax} \ln a dx = \frac{1}{\ln a} e^{\ln ax} = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0, a \neq 1$$

## Versione generalizzata

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \left( \begin{array}{l} u = f(x) \\ du = f'(x) dx \end{array} \right) = \int e^u du = e^u = e^{f(x)}$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \left( \begin{array}{l} u = f(x) \\ du = f'(x) dx \end{array} \right) = \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}$$

# Esempio 1

Calcolare  $I = \int (2e^x + 2^x) dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= 2 \int e^x dx + \int 2^x dx \\ &= 2e^x + \frac{2^x}{\ln 2} + C \end{aligned}$$

# Esempio 2

Calcolare  $I = \int x e^{2x^2} dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int e^{x^2} 4x dx \\ &= \left( \begin{array}{l} u = 2x^2 \\ du = 4x dx \end{array} \right) = \frac{1}{4} \int e^u du \\ &= (u = 2x^2) = \frac{1}{4} e^{2x^2} + C \end{aligned}$$

# Esempio 3

Calcolare  $I = \int (e^{2x} + e^{-x}) dx$

## Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \int e^{2x} dx + \int e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^{2x} 2 dx - \int e^{-x} (-1) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^{-x} + C \end{aligned}$$

# Potenze con un esponenziale/logaritmo



# Esempio 4

Calcolare  $I = \int \frac{(1 + e^{-x})^2}{e^x} dx$

## Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \int (1 + e^{-x})^2 \cdot e^{-x} dx \\ &= \left( \begin{array}{l} u = 1 + e^{-x} \\ du = -e^{-x} dx \end{array} \right) = - \int u^2 du = -\frac{u^3}{3} \\ &= (u = 1 + e^{-x}) = -\frac{1}{3} (1 + e^{-x})^3 + C \end{aligned}$$

# Esempio 5

Calcolare  $I = \int \frac{(1 + e^{-x})^2}{e^{-x}} dx$

## Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \int (1 + e^{-x})^2 \cdot e^x dx \\ &= \left( \begin{array}{l} u = e^x \implies \frac{1}{u} = e^{-x} \\ du = e^x dx \end{array} \right) = \int \left( 1 + \frac{1}{u} \right)^2 du = \int \left( 1 + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2} \right) du \\ &= u + 2 \ln |u| + \frac{u^{-2+1}}{-2+1} = u + 2 \ln |u| - u^{-1} \\ &= (u = e^x) = e^x + 2x - e^{-x} + C \end{aligned}$$

# Esempio 6

Calcolare  $I = \int \frac{\ln x}{2x} dx$

## Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \left( \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \int u du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^2}{2} \\ &= (u = \ln x) = \frac{1}{4} (\ln x)^2 = \frac{1}{4} \ln^2 x + C \end{aligned}$$

A close-up profile of a dog's head, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue hanging out. The dog has white fur on its face and chest, with black and brown patches. The background is a grassy area. The entire image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the middle of the dog's face.

FINE