Esponenziale — Teoria

(Integrali indefiniti elementari) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esempi

Calcolare

1. $I = \int \left(2e^x + 2^x\right)\, dx$
2. $I = \int xe^{2x^2}\, dx$
3. $I = \int \left(e^{2x} + e^{-x}\right)\, dx$
4. $I = \int \frac{(1+e^{-x})^2}{e^x}\, dx$
5. $I = \int \frac{(1+e^{-x})^2}{e^{-x}}\, dx$
6. $I = \int \frac{\ln x}{2x}\, dx$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Integrale di un'esponenziale

Base

$$\int e^x \, dx \; = \; e^x$$

$$\int a^x \, dx \; = \; \int e^{\ln a x} \, dx \; = \; \frac{1}{\ln a} \int e^{\ln a x} \ln a \, dx \; = \; \frac{1}{\ln a} e^{\ln a x} \; = \; \frac{a^x}{\ln a} \, , \; a > 0 \, , \; a \neq 1$$

Versione generalizzata

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx \; = \; \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x) \, dx \end{pmatrix} \; = \; \int e^u \, du = e^u = e^{f(x)}$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx \; = \; \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x) \, dx \end{pmatrix} \; = \; \int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} \; = \; \frac{a^{f(x)}}{\ln a}$$

Esempio 1

> Calcolare $\quad I = \int (2e^x + 2^x)\ dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int e^x\, dx + \int 2^x\, dx \\
&= 2e^x + \frac{2^x}{\ln 2} + C
\end{aligned}
$$

Esempio 2

> Calcolare $I = \int x e^{2x^2}\, dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4} \int e^{x^2} 4x\, dx \\
&= \begin{pmatrix} u = 2x^2 \\ du = 4x\, dx \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \int e^u\, du \\
&= \left(u = 2x^2 \right) = \frac{1}{4} e^{2x^2} + C
\end{aligned}
$$

Esempio 3

> Calcolare $I = \int \left(e^{2x} + e^{-x}\right)\, dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \int e^{2x}\, dx + \int e^{-x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int e^{2x} 2\, dx - \int e^{-x}(-1)\, dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - e^{-x} + C \end{aligned}$$

Potenze con un esponenziale/logaritmo

Esempio 4

> Calcolare $\quad I = \displaystyle\int \frac{(1+e^{-x})^2}{e^x}\, dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \int (1+e^{-x})^2 \cdot e^{-x}\, dx \\
&= \begin{pmatrix} u = 1 + e^{-x} \\ du = -e^{-x}\, dx \end{pmatrix} = -\int u^2\, du = -\frac{u^3}{3} \\
&= \left(u = 1 + e^{-x} \right) = -\frac{1}{3}\left(1+e^{-x}\right)^3 + C
\end{aligned}
$$

Esempio 5

> Calcolare $\quad I = \int \frac{(1+e^{-x})^2}{e^{-x}}\, dx$

Soluzione

$$\begin{aligned}
I &= \int (1+e^{-x})^2 \cdot e^x \, dx \\
&= \begin{pmatrix} u = e^x & \Longrightarrow & \frac{1}{u} = e^{-x} \\ & du = e^x \, dx & \end{pmatrix} = \int \left(1 + \frac{1}{u}\right)^2 du = \int \left(1 + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}\right) du \\
&= u + 2\ln|u| + \frac{u^{-2+1}}{-2+1} = u + 2\ln|u| - u^{-1} \\
&= (\, u = e^x \,) = e^x + 2x - e^{-x} + C
\end{aligned}$$

Esempio 6

> Calcolare $\quad I = \int \frac{\ln x}{2x}\,dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int \ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int u\,du \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^2}{2} \\
&= (\, u = \ln x \,) = \frac{1}{4}(\ln x)^2 = \frac{1}{4}\ln^2 x + C
\end{aligned}
$$


FINE