Le potenze (versione generalizzata)

(Integrali indefiniti elementari) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esempi

Calcolare

1. $I = \int \sqrt{2-x}\,dx$

2. $I = \int (3x-5)^8\,dx$

3. $I = \int \frac{1}{3-2x}\,dx$

4. $I = \int 4x\left(1+2x^2\right)^7\,dx$

5. $\int \sqrt{x^2-x^4}\,dx$

6. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

7. $I = \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

8. $I = \int \frac{x\,(x+2)}{(x+1)^2}\,dx$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Potenza (con esponente reale)

Base

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \; n \neq -1$$

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x|, \; (n = -1)$$

Versione generalizzata

$$\int f^n(x) \cdot f'(x) \, dx = \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x) \, dx \end{pmatrix} = \int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}, \; n \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x) \, dx \end{pmatrix} = \int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| = \ln|f(x)|, \; (n = -1)$$

Potenze generalizzate

Caso frequente: argomento lineare

L'integrale

$$\int (ax+b)^n \, dx$$

si semplifica usando la sostituzione $u = ax + b$ con $du = a\,dx$

Caso $(n \neq -1)$

$$\begin{aligned} \int (ax+b)^n \, dx &= \frac{1}{a} \int (ax+b)^n a\,dx = \begin{pmatrix} u = ax+b \\ du = a\,dx \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \int u^n \, du \\ &= \frac{1}{a} \frac{u^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C \end{aligned}$$

Caso frequente: argomento lineare

L'integrale

$$\int (ax+b)^n \, dx$$

si semplifica usando la sostituzione $u = ax + b$ con $du = a\,dx$

Caso $(n = -1)$

$$\int (ax+b)^{-1} \, dx = \frac{1}{a}\int \frac{a}{(ax+b)} \, dx = \begin{pmatrix} u = ax+b \\ du = a\,dx \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u} \, du$$

$$= \frac{1}{a}\ln u = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

Forma generale

L'integrale

$$\int (f(x))^n \cdot f'(x)\, dx$$

si semplifica usando la sostituzione $u = f(x)$ con $du = f'(x)\, dx$

- **Caso** $(n \neq -1)$: $\displaystyle\int \left(f(x)\right)^n \cdot f'(x)\, dx \ = \ \int u^n\, du$

- **Caso** $(n = -1)$: $\displaystyle\int \left(f(x)\right)^{-1} \cdot f'(x)\, dx \ = \ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx \ = \ \int \frac{1}{u}\, du$

Riduzione di grado tra numeratore e denominatore

Se il grado del numeratore è maggiore o uguale del grado del denominatore eseguo la divisione con resto dei due polinomi

In questo modo si semplifica l’integrale (si veda **fratti semplici** per la trattazione completa)

Argomento lineare

Esempio 1

> Calcolare $I = \int \sqrt{2-x}\,dx$

Soluzione

$$I = \begin{pmatrix} u = 2 - x \\ du = -dx \end{pmatrix} = -\int u^{\frac{1}{2}}\,du = -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} + C$$

Esempio 2

> Calcolare $I = \int (3x-5)^8 \, dx$

Soluzione

$$I = \begin{pmatrix} u = 3x-5 \\ du = 3\,dx \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\int u^8 \, du = \frac{1}{3}\frac{u^9}{9} = \frac{1}{27}(3x-5)^9 + C$$

Esempio 3

> Calcolare $I = \int \frac{1}{3-2x}\,dx$

Soluzione

$$I = \begin{pmatrix} u = 3-2x \\ du = -2\,dx \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\ln|u| = -\frac{1}{2}\ln|3-2x| + C$$

Argomento generale

Esempio 4

> Calcolare $I = \int 4x\left(1+2x^2\right)^7 dx$

Soluzione

$$I = \begin{pmatrix} u = 1+2x^2 \\ du = 4x\,dx \end{pmatrix} = \int u^7\,du = \frac{u^8}{8} = \frac{1}{8}\left(1+2x^2\right)^8 + C$$

Esempio 5

> Calcolare $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - x^4}\, dx$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
I &= \int x\sqrt{1-x^2}\, dx = \begin{pmatrix} u = 1 - x^2 \\ du = -2x\, dx \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du \\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2} \\
&= -\frac{1}{3}\,\frac{x}{x}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2} = -\frac{\left(1-x^2\right)}{3x}\sqrt{x^2-x^4} + C
\end{aligned}
$$

Esempio 6

Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Soluzione

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \left(\begin{array}{c} u=\sqrt{x} \\ du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{2u}\,dx \end{array}\right) = \int \frac{2u}{1+u}\,du \\
&= \int \frac{2(u+1)-2}{1+u}\,du = \int 2\,du - 2\int \frac{1}{1+u}\,du \\
&= 2u - 2\ln|1+u| = 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C
\end{aligned}$$

Riduzione di grado tra numeratore e denominatore

Esempio 7

> Calcolare $\quad I = \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

Soluzione

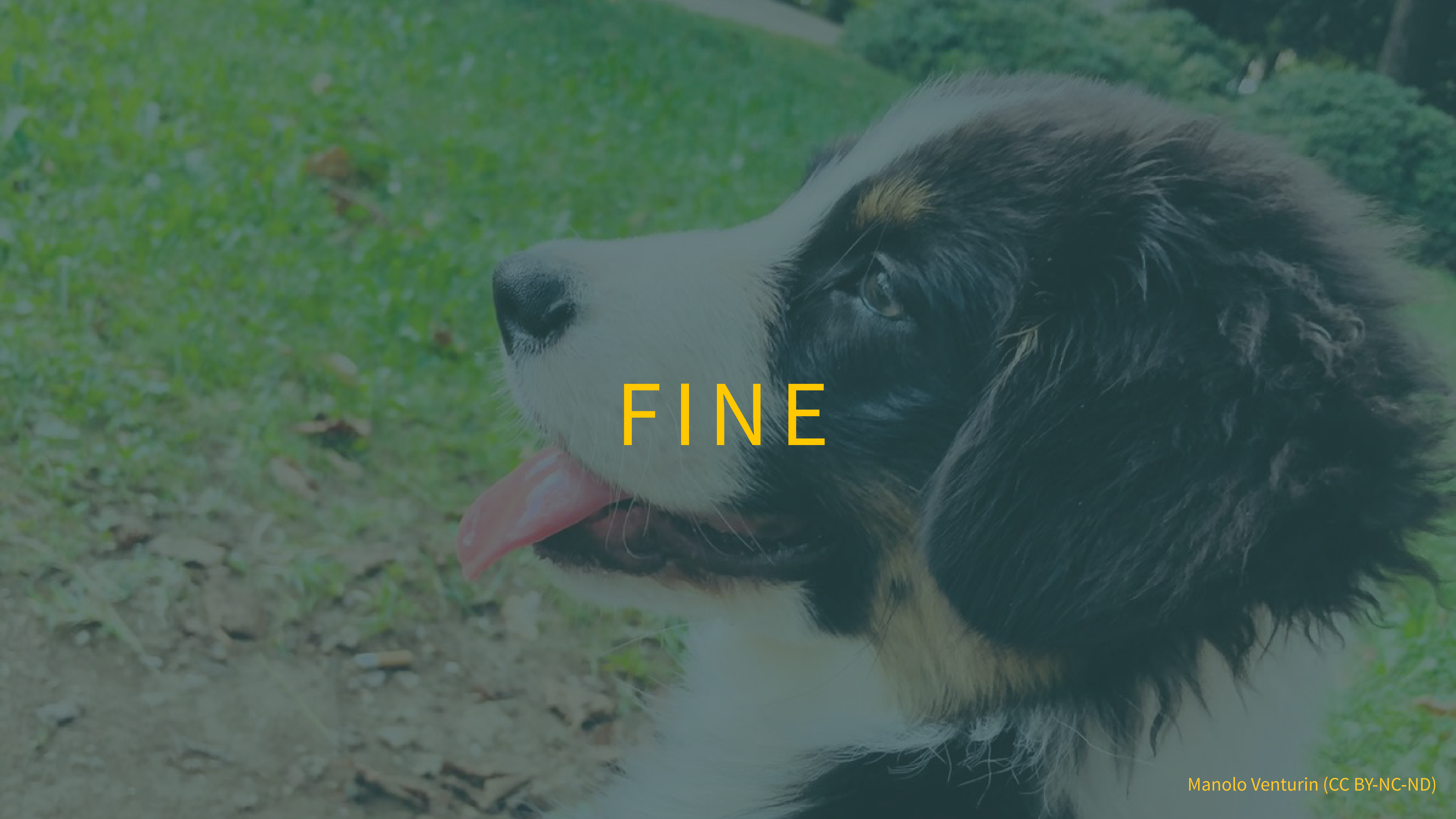
$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1-2x+x^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx - 2\int \sqrt{x}\,dx + \int x\sqrt{x}\,dx \\
&= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \\
&= 2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C
\end{aligned}$$

Esempio 8

> Calcolare $I = \int \frac{x\,(x+2)}{(x+1)^2}\,dx$

Soluzione

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{(x^2+2x+1)-1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= \int dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = x - \int (x+1)^{-2}\,dx \\ &= x - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = x + \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)