Primitive immediate

(Formule fondamentali di integrazione)

Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Primitive immediate

Gli integrali elementari si ricavano

- dalle tabelle delle derivate
- dalle regole di derivazione

Esempio elementare (dalla regola di derivazione della potenza)

$$\mathrm{Der}\left[x^{n+1}\right] = (n+1)x^{n+1-1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n+1}\,\mathrm{Der}\left[x^{n+1}\right] = x^n$$

$$\text{(integrando ambo i membri)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int x^n\,dx, \qquad (n \neq -1)$$

Esempio dalla regole di derivazione delle funzioni composte

$$\mathrm{Der}\left[f^{n+1}(x)\right] = (n+1)f^{n+1-1}(x)\cdot f'(x)$$

$$\implies \quad \frac{1}{n+1}\,\mathrm{Der}\left[f^{n+1}(x)\right] = f^{n}(x)\cdot f'(x)$$

(integrando ambo i membri)

$$\implies \quad \int f^{n}(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}, \quad (n \neq -1)$$

Integrazione per sostituzione

Tale regola deriva dalla regola di derivazione delle funzioni composte

Da

$$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

con il cambio di variabile $u = g(x)$ si ha

$$\left[\int f(u)\,du\right]_{u=g(x)} = F(g(x)) + C = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

dove l'ultima uguaglianza segue da

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Integrazione per sostituzione

Nel risolvere

$$\left[\int f(u)\,du\right]_{u=g(x)} = F(g(x)) + C = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

negli esercizi conviene:

1. Individuare l'espressione da sostituire $u = g(x)$ che semplifica l'integrale
2. Calcolare $\frac{du}{dx} = g'(x)$, e scrivere il differenziale $du = g'(x)\,dx$
3. Sostituire le espressioni di $u = g(x)$ e $du = g'(x)\,dx$ nell'integrale

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

4. Risolvere l'integrale "semplificato" $\int f(u)\,du = F(u)$
5. Sostituire l'espressione originaria nell'integrale con la sostituzione $u = g(x)$ in $F(u) = F(g(x))$

Integrazione per sostituzione (prima forma)

> **Teorema**
> Sia f una funzione continua e g una funzione derivabile, allora
>
> $$\int f(g(t))g'(t)dt = \left[\int f(x)dx\right]_{x=g(t)}$$

Nota:

- Su questo teorema sono basate le estensioni delle formule elementari al caso generalizzato (formule finale di questa lezione)!
- Se $x = g(t)$ allora $dx = g'(t) \cdot dt$ prende il nome di differenziale

Integrazione per sostituzione (seconda forma)

> **Teorema**
> Sia f una funzione continua e g una funzione derivabile e suriettiva con $g(t) \neq 0$ per ogni t appartenente all'intervallo di definizione della f, allora
>
> $$\int f(x)dx = \left[\int f(g(t))g'(t)dt \right]_{t=g^{-1}(x)}$$

Nota:

- Se $g(t)$ è invertibile (come nelle ipotesi del teorema) allora possiamo esprimere il risultato finale in funzione della x
- Se $g(t)$ non fosse invertibile il risultato finale sarebbe espresso nella variabile t (risultato utile nel caso degli integrali definiti che vedremo più avanti dove non è richiesto il tornare ad esprimere il risultato nella variabili originaria x)

Esempio 1 (cambio di variabile)

> Calcolare
>
> $$I = \int x\left(1+x^2\right)^2 dx$$

Soluzione

Passo 1: individuazione dell'espressione da sostituire

L'espressione da sostituire è $u = (1+x^2)$ perché si arriva ad un integrale di una potenza (al quadrato) che si sa risolvere $\left(\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\right)$

Passo 2: calcolo del differenziale

$$u = 1 + x^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Longrightarrow \quad du = 2x\,dx$$

Esempio 1 (cambio di variabile)

$$I = \int x\left(1+x^2\right)^2 dx$$

Passo 3: sostituzione dell'espressione nell'integrale: $u = 1 + x^2\ ,\ du = 2x\,dx$

$$I \;=\; \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^2 (2x)\ dx \;=\; \frac{1}{2}\int u^2\,du$$

Passo 4: risoluzione dell'integrale "semplificato"

$$I \;=\; \frac{1}{2}\int u^2\,du \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{u^3}{3} \;=\; \frac{1}{6}u^3$$

Passo 5: sostituzione dell'espressione originaria

Sostituisco $u = (1 + x^2)$ nella primitiva trovata precedentemente, ottenendo

$$I \;=\; \frac{1}{6}u^3 \;=\; \frac{1}{6}(1+x^2)^3 + C$$

Esempio 1 (cambio di variabile)

$$I = \int x\left(1+x^2\right)^2 dx$$

Verifica della soluzione

Eseguo la derivata della primitiva

$$\mathrm{Der}\left[\frac{1}{6}(1+x^2)^3 + C\right] \; = \; \frac{1}{6}\cdot 3\left(1+x^2\right)^2 \cdot 2x \; = \; x\left(1+x^2\right)^2$$

Esempio 2 (cambio di variabile, seconda forma)

> Calcolare
>
> $$I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \, dx$$

Soluzione

Passo 1 e 2: individuazione dell’espressione da sostituire e del suo differenziale

Conviene sostiture

$$x = g(t) = t^2$$

dove si ha

$$dx = 2t \; dt$$

Esempio 2 (cambio di variabile, seconda forma)

Passo 3: sostituzione dell'espressione nell'integrale: $x = t^2$, $dx = 2t\ dt$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t-1}\,dt$$

Passo 4: risoluzione dell'integrale "semplificato"

Si ha

$$I = \int \frac{t}{t-1}\,dt \;=\; \int \frac{(t-1)+1}{t-1}\,dt \;=\; \int dt + \int \frac{1}{t-1}\,dt \;=\; t + \int \frac{1}{t-1}\,dt$$

Eseguendo una sostituzione del (primo) tipo $u = t - 1$ con $du = dt$ si ha

$$\int \frac{1}{t-1}\,dt \;=\; \int \frac{1}{u}du \;=\; \ln|u| \;=\; \ln|t-1|$$

Esempio 2 (cambio di variabile, seconda forma)

Quindi si ha

$$I = t + \int \frac{1}{t-1}\,dt \;=\; t + \ln|t-1| + C$$

Passo 5: sostituzione dell'espressione originaria

Se vogliamo scrivere il risultato finale

$$I = t + \ln|t-1| + C$$

in termini della x dobbiamo eseguire la sostituizione inversa $t = \sqrt{x}$ ottenendo

$$I = \sqrt{x} + \ln|\sqrt{x} - 1| + C$$

Integrali immediati

Potenza (con esponente reale)

Base

- $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \; n \neq -1$
- $\int x^{-1} \, dx = \int \dfrac{1}{x} \, dx = \ln|x|, \; (n = -1)$

Generalizzato (integrazione per sostituzione)

- $\int f^n(x) \cdot f'(x) \, dx = \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x) \, dx \end{pmatrix} = \int u^n \, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} = \dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1}, \; n \neq -1$
- $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x) \, dx \end{pmatrix} = \int \dfrac{1}{u} \, du = \ln|u| = \ln|f(x)|, \; (n = -1)$

Esponenziali

Base

- $\displaystyle\int e^x \, dx \ = \ e^x$
- $\displaystyle\int a^x \, dx \ = \ \frac{a^x}{\ln a} \ , \ a > 0 \, , \ a \neq 1$

Generalizzato

- $\displaystyle\int e^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx \ = \ \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x) \, dx \end{pmatrix} \ = \ \int e^u \, du = e^u = e^{f(x)}$
- $\displaystyle\int a^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx \ = \ \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x) \, dx \end{pmatrix} \ = \ \int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} \ = \ \frac{a^{f(x)}}{\ln a}$

Funzioni trigonometriche

Base

- $\displaystyle\int \sin x\, dx \;=\; -\cos x$
- $\displaystyle\int \cos x\, dx \;=\; \sin x$

Generalizzato

- $\displaystyle\int \sin f(x) \cdot f'(x)\, dx \;=\; \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x)\, dx \end{pmatrix} \;=\; \int \sin u\, du \;=\; -\cos u \;=\; -\cos f(x)$
- $\displaystyle\int \cos f(x) \cdot f'(x)\, dx \;=\; \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x)\, dx \end{pmatrix} \;=\; \int \cos u\, du \;=\; \sin u \;=\; \sin f(x)$

Funzioni trigonometriche

Base

- $\displaystyle \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \;=\; \tan x$
- $\displaystyle \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx \;=\; -\cot x$

Generalizzato

- $\displaystyle \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx \;=\; \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x)\,dx \end{pmatrix} \;=\; \int \frac{1}{\cos^2 u}\,du \;=\; \tan u \;=\; \tan f(x)$
- $\displaystyle \int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\,dx \;=\; \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x)\,dx \end{pmatrix} \;=\; \int \frac{1}{\sin^2 u}\,du \;=\; -\cot u \;=\; -\cot f(x)$

Funzioni trigonometriche inverse

Base

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$

Generalizzato

- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x)\,dx \end{pmatrix} = \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u = \arctan f(x)$
- $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx = \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x)\,dx \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin u = \arcsin f(x)$

Funzioni iperboliche

Base

- $\displaystyle\int \sinh x \, dx \quad = \quad \cosh x$
- $\displaystyle\int \cosh x \, dx \quad = \quad \sinh x$

Generalizzato

- $\displaystyle\int \sinh f(x) \cdot f'(x) \, dx \; = \; \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x) \, dx \end{pmatrix} \; = \; \int \sinh u \, du \; = \; \cosh u \; = \; \cosh f(x)$
- $\displaystyle\int \cosh f(x) \cdot f'(x) \, dx \; = \; \begin{pmatrix} u = f(x) \\ du = f'(x) \, dx \end{pmatrix} \; = \; \int \cosh u \, du \; = \; \sinh u \; = \; \sinh f(x)$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)