Calcolo integrale
Introduzione

(Introduzione / Integrali indefiniti)
Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 20 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Cosa significa “integrare”?

1. Fare l’operazione inversa della derivata
2. Calcolare l’area sottesa dal grafico di una funzione

Questi due problemi sono legati tra loro

Il **problema 2** sotto opportune ipotesi si può risolvere attraverso il **problema 1**

Argomenti del calcolo integrale

- Integrali indefiniti (i.e. il calcolo di primitive ovvero l’operazione inversa della derivazione)
- Integrali definiti e il legame con gli integrali indefiniti
- Integrali definiti per il calcolo di aree
- Integrali impropri (estensione degli integrali definiti)
- Funzioni integrali

Prerequisiti

- Calcolo di derivate
- Grafico di funzione (usati nel calcolo delle aree)

Integrali indefiniti

- Definizione di primitiva di una funzione
- Integrale indefinito
- Proprietà dell’integrale indefinito
- Esempi base
- Osservazioni e note

Definizione di primitiva di una funzione

Integrare una funzione $f(x)$ significa determinare un'altra funzione $F(x)$ tale che

$$F'(x) = f(x)$$

i.e. tale che $f(x)$ sia la derivata di $F(x)$

Definizione: $F(x)$ è una **primitiva** di $f(x)$ sse $F'(x) = f(x)$

Nota: Fate attenzione a distinguere bene tra F e f!

Integrale indefinito (definizione)

Tutte le primitive di $f(x)$ sono del tipo $F(x) + C$ dove C è una costante arbitraria e si indica con il simbolo

$$\int f(x)\, dx = \{F(x) + C\}$$

Questo simbolo prende il nome di **integrale indefinito**

Nota: Infatti, se C è una costante, allora la derivata di $F(x) + C$ è ancora $f(x)$

Esempi: polinomi base

- La primitiva di $f(x) = 1$ è $F(x) = x + C$, infatti $(x + C)' = 1$ e scriveremo

$$\int 1\,dx \;=\; \int dx \;=\; x + C$$

- La primitiva di $f(x) = x$ è $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$, infatti $\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)' = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot x = x$ e scriveremo

$$\int x\,dx \;=\; \frac{1}{2}x^2 + C$$

- La primitiva di $f(x) = x^2$ è $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, infatti $\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} \cdot x^2 = x^2$ e scriveremo

$$\int x^2\,dx \;=\; \frac{1}{3}x^3 + C$$

Proprietà dell'integrale indefinito

L'integrale della derivata

Dalla definizione di primitiva

$$F'(x) = f(x) \iff \int f(x)\, dx = \{F(x) + C\}$$

segue che

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)]\; dx \;=\; f(x) + C$$

Proprietà dell'integrale indefinito

Integrale della somma di due funzioni

Dalla regola di derivazione $\mathrm{Der}[f(x)+g(x)] = \mathrm{Der}[f(x)] + \mathrm{Der}[g(x)]$ segue che

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx \;=\; \int f(x)\,dx \;+\; \int g(x)\,dx$$

Integrale del prodotto di una funzione per una costante

Dalla regola di derivazione $\mathrm{Der}[\alpha \cdot f(x)] = \alpha \cdot \mathrm{Der}[f(x)]$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ segue che

$$\int \alpha \cdot f(x)\,dx \;=\; \alpha \cdot \int f(x)\,dx\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Esempi

Esempio: l’integrale della derivata

$$\int x\,dx \;=\; \int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\,dx \;=\; \frac{1}{2}x^2 + C$$

Diremo che l’integrale si cancella con la derivata

Esempio: integrale della somma di due funzioni

$$
\begin{aligned}
\int (x + x^2)\, dx &= \int x\, dx + \int x^2\, dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 + C_1 + \frac{1}{3}x^3 + C_2 \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C
\end{aligned}
$$

Nota: Spesso, si usa sempre la lettera C invece di specificare C_1 e C_2 nei diversi passaggi o viene del tutto omessa

Esempio: Integrale del prodotto di una funzione per una costante

$$\int 2x\,dx \;=\; 2\int x\,dx \;=\; 2\frac{1}{2}x^2 + C = x^2$$

Nota: Il prodotto dell'integrale è uguale all'integrale del prodotto? NO!

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$

Ad esempio

- $\int x^2\,dx \;=\; \frac{1}{3}x^3 + C$
- $\int x\,dx \cdot \int x\,dx \;=\; \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right) \;=\; \frac{1}{4}x^4 + (C_1 + C_2)\frac{1}{2}x^2 + C_1\cdot C_2$

Osservazioni e note

Osservazione 1 (diversa costante di integrazione)

> Due primitive potrebbero sembrare diverse, ma in realtà appartengono alla stessa famiglia, i.e. differiscono per una costante

Ad esempio, si ha

$$\int (x+1)\,dx \;=\; \int x\,dx + \int 1\,dx \;=\; \frac{1}{2}x^2 + C + x + C \;=\; \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

Ma $\frac{1}{2}x^2 + x + C$ si può anche scrivere come $\frac{(x+1)^2}{2} + C$

Quindi, $\frac{(x+1)^2}{2}$ e $\frac{1}{2}x^2 + x$ sono soluzioni di $\int (x+1)\,dx$, infatti differiscono (facendo la differenza) per una costante

Osservazione 2 (costanti di integrazione diverse su intervalli disgiunti)

> Premessa: Le primitive di f su un intervallo differiscono per una costante, ovvero sono tutte traslazioni di una stessa funzione
>
> Se il dominio di f non è un intervallo, ma ad esempio è l'unione di più intervalli disgiunti, allora ogni tratto del grafico può avere una costante di integrazione diversa, i.e. può essere traslato arbitrariamente rispetto agli altri

Ad esempio

$$\int \left(-\frac{1}{x^2}\right)\, dx \;=\; \begin{cases} \frac{1}{x} + C_1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x} + C_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

con in generale $C_1 \neq C2$

Osservazione 3

> Un integrale molto importante è
>
> $$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + C$$

Questo segue da

- $\mathrm{Der}[\ln(x) + C_1] = \frac{1}{x}$ e
- $\mathrm{Der}[\ln(-x) + C_2] = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

che sono due espressioni uguali

Nel scrivere la soluzione dell'integrale, anche in questo caso la costante C è da intendersi come spiegato precedentemente

Nota: Molto spesso si omette il modulo assumendo il dominio di validità della funzione

Osservazione 4

> Esistono funzioni che non ammettono una primitiva?

Risposta: Sì

Ad, esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

non ammette primitiva su nessun intervallo (a, b) con $a < 0 < b$

Se F fosse tale primitiva, si avrebbe

- $F(x) = C_1$ per $x < 0$
- $F(x) = x + C_2$ per $x \geqslant 0$

Inoltre, F dovrebbe essere continua in 0 per cui $C_1 = C_2$, ma tale F non è mai derivabile (definizione di primitiva in $x = 0$)

Osservazione 5

> La primitiva se esiste è unica?

Risposta: No

Sappiamo che la funzione primitiva, se esiste, non è unica, infatti, se $F(x)$ è la primitiva di $f(x)$, allora anche $F(x) + C$, con C costante è una primitiva di $f(x)$

Osservazione 6

> Cosa caratterizza l'esistenza di una primitiva?

Risposta: La continuità

Si dimostra che se f è una funzione continua allora ammette primitiva

Osservazione 7

> Si riescono ad esprimere in modo analitico tutte le primitive di una data funzione?

Risposta: No

Ad esempio, si dimostra che tutte le funzioni continue qui di seguito riportate, non ammettono una primitiva elementare, i.e. esprimibile come somma, prodotto, composizione, di un numero finito di funzioni elementari

$$e^{\pm x^2}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\cos x}{x}, \quad \sin x^2, \quad \cos x^2, \quad \frac{\sin x}{x^2}, \quad \frac{\cos x}{x^2}, \quad \frac{\ln x}{1+x}, \quad \frac{1}{\ln x}$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)