Esercizi parte III (D)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Indice degli esercizi (corso Analisi Matematica 1)

Risolvere le equazioni (con rappresentazione grafica delle soluzioni)

1. $(\mathrm{Re}(z)+2)^3(|z+(1+i)|-6)^2=0$
2. $z^4-(2-i)z^2+1-i=0$
3. $|z-1|^2+z^2+z-2=0$

Risolere le disequazioni

4. $2|z|^2 \leqslant (z^2+\bar{z}^2)+|z+\bar{z}|+2$
5. $(|z+i|-4)\cdot\left(\frac{|z|}{|z-2|}-1\right)\leqslant 0$

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Soluzione

Esercizio 1

> Risolvere l'equazione $(\mathrm{Re}(z)+2)^3(|z+(1+i)|-6)^2=0$

Soluzione

Per la legge dell'annullamento del prodotto si ha

$$(\mathrm{Re}(z)+2)^3(|z+(1+i)|-6)^2=0$$
$$\iff$$
$$\left\{(\mathrm{Re}(z)+2)^3=0 \quad \vee \quad (|z+(1+i)|-6)^2=0\right\}$$

Esercizio 1

Soluzione: $(\mathrm{Re}(z)+2)^2=0$

Si ha

$$(\mathrm{Re}(z)+2)^3=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Re}(z)+2=0$$

Posto $z=x+iy$ si ha

$$\mathrm{Re}(z)+2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x+2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=-2$$

Si tratta di una retta verticale di equazione $x=-2$

Esercizio 1

Soluzione: $\left(|z+(1+i)|-6\right)^2=0$

Si ha

$$\left(|z+(1+i)|-6\right)^2=0 \quad \Longleftrightarrow \quad |z+(1+i)|-6=0$$

Ora, si ha

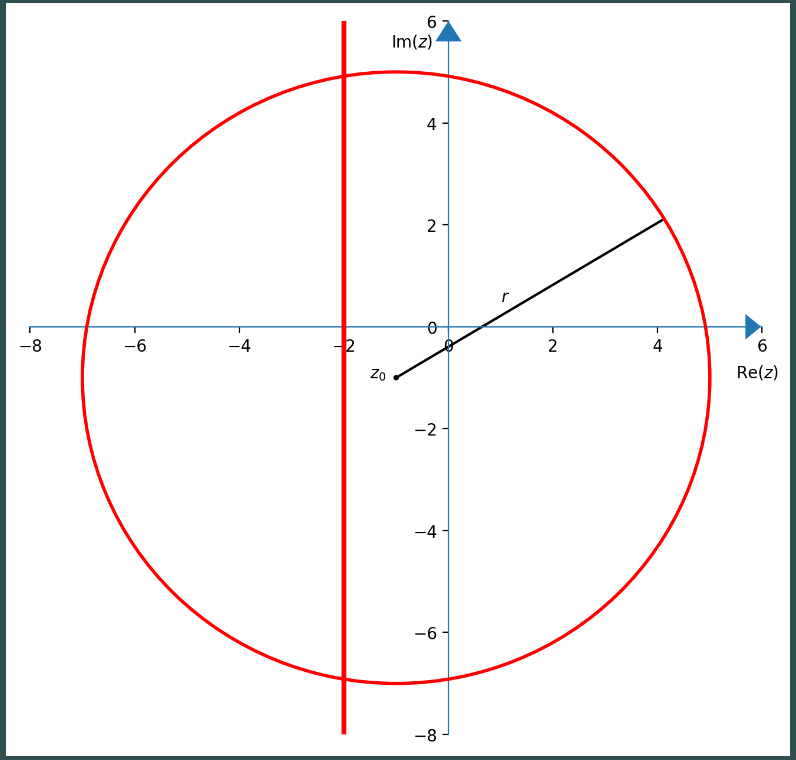
$$|z+(1+i)|-6=0 \quad \Longleftrightarrow \quad |z+(1+i)|=6$$

Si tratta di una circonferenza centrata in $z_0=-(1+i)$ e raggio 6

Esercizio 1

Soluzione finale

- $x = -2$ (retta verticale)
- $|z + (1 + i)| = 6$ (circonferenza centrata in $z_0 = -(1 + i)$ e raggio 6)



Esercizio 2

> Risolvere l’equazione $z^4 - (2-i)z^2 + 1 - i = 0$

Soluzione

Si tratta di una equazione biquadratica la cui soluzione è

$$
\begin{aligned}
z^2 &= \frac{(2-i) + \sqrt{(2-i)^2 - 4(1-i)}}{2} = \frac{(2-i) + \sqrt{\cancel{4} - 1 - \cancel{4i} - \cancel{4} + \cancel{4i}}}{2} \\
&= \frac{(2-i) + \sqrt{-1}}{2} = \frac{(2-i) \pm i}{2} = \begin{cases} 1 \\ 1 - i \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ora

$$
z^2 = 1 \implies z_{1,2} = \pm 1
$$

Manolo Venturin

Esercizio 2

Calcoliamo

$$z^2 = 1 - i \implies z_{3,4} = \sqrt{1-i}$$

Dato $\Delta = 1 - i$ si ha

- $|\Delta| = \sqrt{2}$, e $\Delta \in \text{IV quadrante}$
- $\theta = \arg\Delta = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$
- Forma trigonometrica: $\Delta = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Le radici di Δ sono

- $\Delta_0 = \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt[4]{2} \cdot \text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$
- $\Delta_1 = -\Delta_0$

Serve valutare $\sin$ e $\cos$ in $-\frac{\pi}{8}$ a partire dalla valutazioni in $-\frac{\pi}{4}$

Esercizio 2

Da $\Delta = 1 - i$ si ha

- $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ (permette di scegliere correttamente il segno)
- $\cos\theta \ = \ \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin\theta \ = \ -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Dalle formula di bisezione si ha

- $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \quad \implies \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < 0$ ($\cos$ positivo e $\sin$ negativo)
- $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) \ = \ \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \ = \ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \ = \ -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \ = \ -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Esercizio 2

Da

$$\Delta_0 = \sqrt[4]{2} \cdot \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$

e

- $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

si ha

$$z_3 = \Delta_0 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$
$$z_4 = -\Delta_0 = -z_3$$

Esercizio 3

> Risolvere l'equazione $|z-1|^2+z^2+z-2=0$

Soluzione

Posto $z=x+iy$ si ha

$$|x-1+iy|^2+(x+iy)^2+(x+iy)-2=0$$

$$\iff$$

$$(x-1)^2+\cancel{y^2}+x^2-\cancel{y^2}+i2xy+x+iy-2=0$$

$$\iff$$

$$x^2-2x+1+x^2+i2xy+x+iy-2=0$$

$$\iff$$

$$(2x^2-x-1)+i(2xy+y)=0$$

Esercizio 3

L'equazione

$$(2x^2 - x - 1) + i(2xy + y) = 0$$

corrisponde al sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ 2xy + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ y(2x+1) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda si ricava

$$\{y = 0\} \quad \vee \quad \left\{x = -\frac{1}{2}\right\}$$

Esercizio 3

Primo caso

Per

$$y = 0$$

si ha

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \left\{1, \ -\frac{1}{2}\right\}$$

quindi le soluzioni sono

- $z_1 = (1, 0) = 1$
- $z_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{2}$

Esercizio 3

Secondo caso

Per

$$x = -\frac{1}{2}$$

si ha

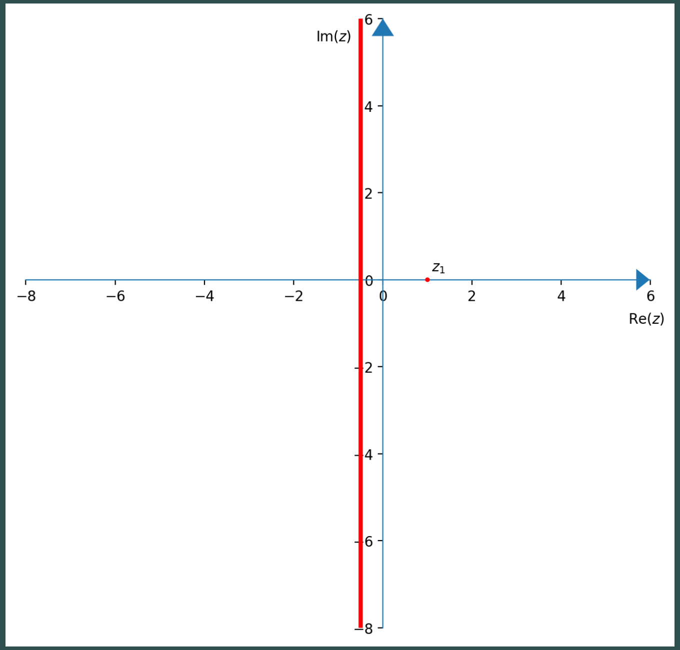
$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi la prima equazione è soddisfatta per ogni y, i.e. le soluzioni sono della forma $z = -\frac{1}{2} + iy$

Esercizio 3

Per rappresentare graficamente le soluzioni abbiamo

- $z_1 = (1, 0) = 1$
- $z_2 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{2}$
- $z = -\frac{1}{2} + iy$ (per ogni y)



Esercizio 4

> Risolvere la disequazione $2|z|^2 \leqslant (z^2 + \bar{z}^2) + |z + \bar{z}| + 2$

Soluzione

Posto $z = x + iy$ si ha

$$2(x^2 + y^2) \leqslant (x^2 - y^2 + \cancel{2ixy} + x^2 - y^2 - \cancel{2ixy}) + |x + \cancel{iy} + x - \cancel{iy}| + 2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\cancel{2x^2} + 2y^2 \leqslant \cancel{2x^2} - 2y^2 + 2|x| + 2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$4y^2 \leqslant 2|x| + 2$$

$$\Longleftrightarrow$$

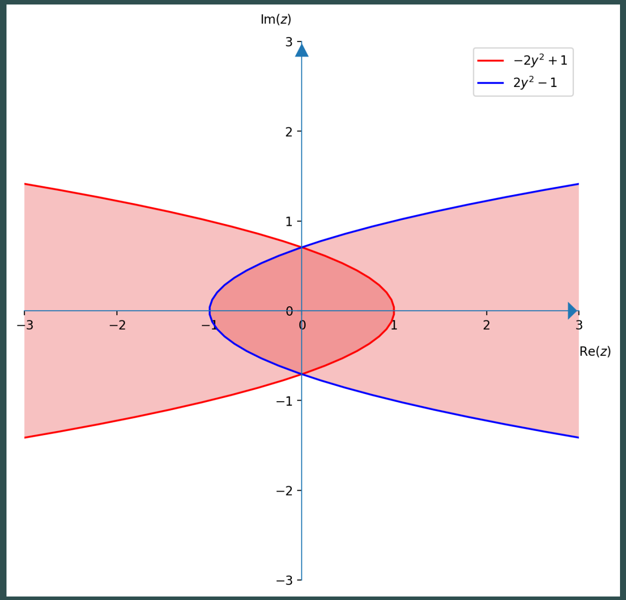
$$2y^2 \leqslant |x| + 1$$

Esercizio 4

Ricordando la definizione di valore assoluto $|x| > a \iff \{x \leqslant -a\} \vee \{x \geqslant a\}$ si ha

$$2y^2 \leqslant |x| + 1 \iff |x| \geqslant 2y^2 - 1$$
$$\iff$$
$$\{x \leqslant -2y^2 + 1\} \quad \vee \quad \{x \geqslant 2y^2 - 1\}$$

La soluzione è rappresentata in figura



Esercizio 5

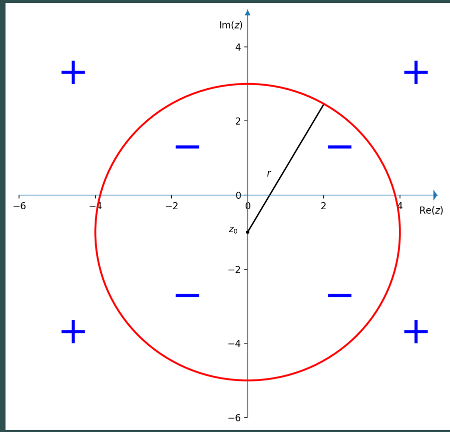
> Risolvere la disequazione $(|z+i|-4)\cdot\left(\frac{|z|}{|z-2|}-1\right)\leqslant 0$

Soluzione

Dobbiamo imporre la condizione di esistenza per il secondo fattore: $z\neq 2$

Applichiamo lo studio del segno

- $(|z+i|-4)\geqslant 0 \iff |z-(-i)|\geqslant 4$ rappresenta un cerchio centrato in $z_0=-i$ e raggio $r=4$; è negativo per valori interni alla circonferenza e positivo per valori esterni



Esercizio 5

Studiamo il segno di $\frac{|z|}{|z-2|} - 1$

Posto $z = x + iy$ si ha

$$\frac{|z|}{|z-2|} - 1 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|z|}{|z-2|} \geqslant 1$$

$$\Longleftrightarrow \text{(il modulo è sempre positivo)}$$

$$|z| \geqslant |z-2|$$

$$\Longleftrightarrow$$

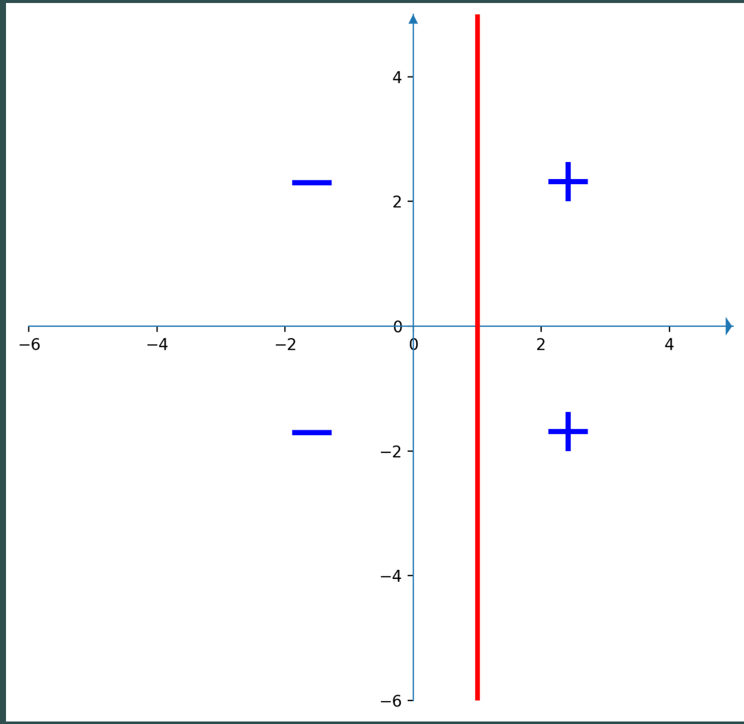
$$x^2 + y^2 \geqslant (x-2)^2 + y^2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$0 \geqslant -4x + 4$$

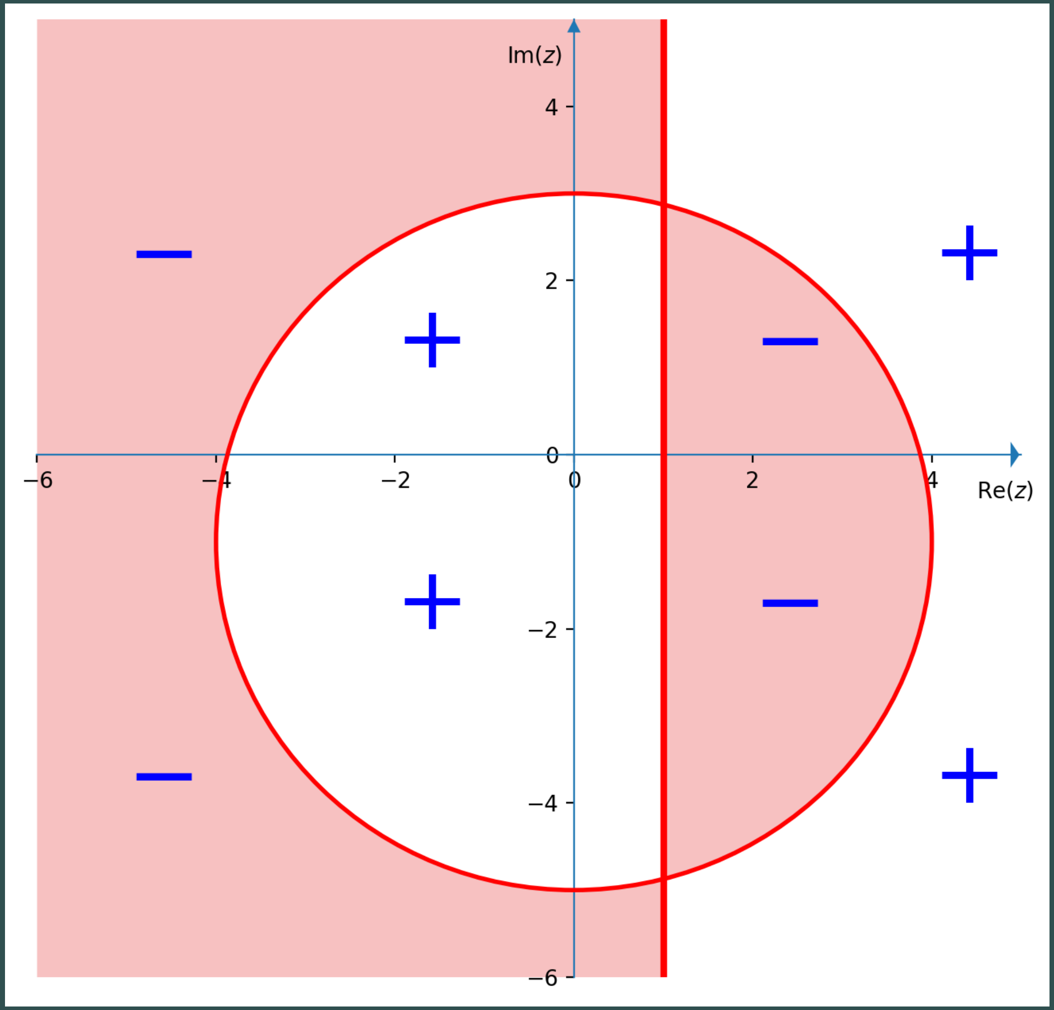
$$\Longleftrightarrow$$

$$x \geqslant 1$$



Esercizio 5

Soluzione finale




FINE
Manolo Venturin