Esercizi parte III (C)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Indice degli esercizi
(corso Analisi Matematica 1)

Risolvere le equazioni

1. $|z+2i| = ||z|-2|$
2. $z\,|z| = 2\overline{z}$
3. $2z^2+\sqrt{2}(1-i)z+1 = 0$ con soluzioni in forma algebrica

Risolere le disequazioni

4. $|\overline{z}-a| \leqslant |\mathrm{Re}\,(z+a)|$ con $a\in\mathbb{R}$ e $a>0$
5. $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Soluzione

Esercizio 1

> Risolvere l'equazione
>
> $$|z+2i| = ||z|-2|$$

Soluzione

Posto $z = x + iy$ si ha

$$
\begin{aligned}
|x+iy+2i| &= \left|\sqrt{x^2+y^2}-2\right| \\
\sqrt{x^2+y^2+4y+4} &= \left|\sqrt{x^2+y^2}-2\right| \\
x^2+y^2+4y+4 &= x^2+y^2+4-4\sqrt{x^2+y^2} \\
4y &= -4\sqrt{x^2+y^2} \quad \Longrightarrow \quad -y = \sqrt{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1

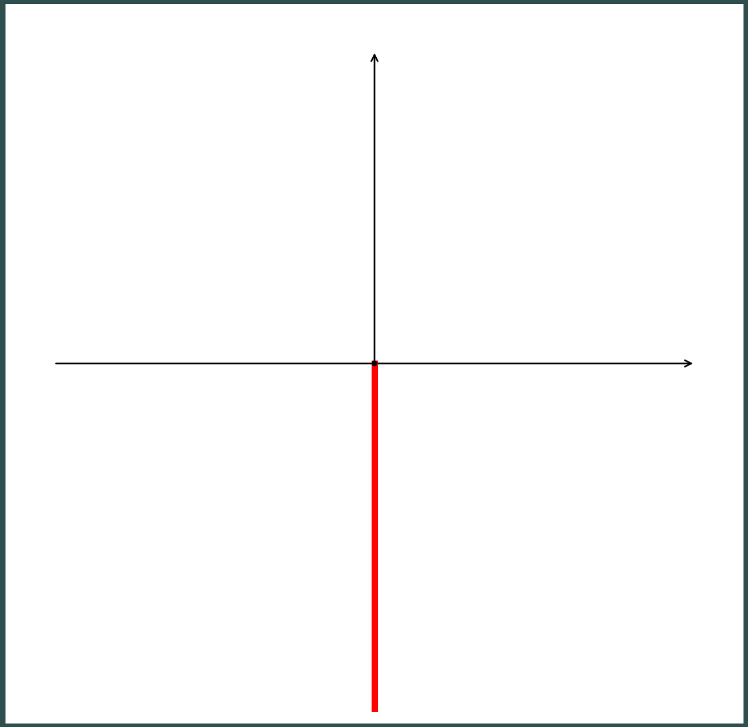
Elevando al quadrato

$$-y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{con} \quad y \leqslant 0$$

si ha

$$y^2 = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Quindi le soluzioni sono della forma
$z = 0 + iy$ con $y \leqslant 0$



Esercizio 2

> Risolvere l'equazione
>
> $$z\,|z| = 2\bar{z}$$

Soluzione

Due strategie:

1. forma algebrica
2. forma esponenziale

Esercizio 2

Soluzione (metodo 1)

$$z\,|z| = 2\bar{z}$$

In forma algebrica si ha

$$(x+iy)\sqrt{x^2+y^2} = 2(x-iy)$$

Uguagliando parte reale e immaginaria si hanno le equazioni

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} = 2x \\ y\sqrt{x^2+y^2} = -2y \end{cases}$$

Esercizio 2

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} = 2x \\ y\sqrt{x^2+y^2} = -2y \end{cases}$$

Se $x \neq 0$ si ha

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} = 2x \\ y\sqrt{x^2+y^2} = -2y \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 2 \\ y \cdot 2 = -2y \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} |x| = 2 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono

$$z = 2 + i0 = 2 \quad , \quad z = -2 + i0 = -2$$

Esercizio 2

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} = 2x \\ y\sqrt{x^2+y^2} = -2y \end{cases}$$

Se $x = 0$ si ha

- allora (dalla seconda) si ha $y|y| = -2y$ i.e. $y = 0$ ($|y| = -2$ non ha soluzione)

Quindi le soluzioni sono

$$z = 0 \quad , \quad z = 2 + i0 = 2 \quad , \quad z = -2 + i0 = -2$$

Esercizio 2

Soluzione (metodo 2)

$$z\,|z| \;=\; 2\bar{z}$$

Utilizzando la forma esponenziale $z = re^{(i\theta)}$ l'eq. diventa

$$z\,|z| = 2\bar{z} \quad \Longrightarrow \quad re^{(i\theta)} \cdot r = 2re^{(-i\theta)} \quad \Longrightarrow \quad r^2 e^{(i\theta)} = 2re^{(-i\theta)}$$

Ricordando la periodicità dell'esponenziale complesso si ha

$$\begin{cases} r^2 = 2r \\ \theta = -\theta + k2\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = 0, 2 \\ \theta = k\pi \end{cases}$$

da cui le soluzioni

$$z = \{0, \; -2, \; 2\}$$

Esercizio 3

> Risolvere l'equazione
>
> $$2z^2 + \sqrt{2}(1-i)z + 1 \;=\; 0$$
>
> esprimendo le soluzioni in forma algebrica

Soluzione

Applicando la formula di secondo grado, le soluzioni sono

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-\sqrt{2}(1-i) + \sqrt{(\sqrt{2}(1-i))^2 - 4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2} = \frac{-\sqrt{2}(1-i) + \sqrt{2(1-i)^2 - 8}}{4} \\ &= \frac{-\sqrt{2}(1-i) + \sqrt{2(\cancel{1} - \cancel{1} - 2i) - 8}}{4} = \frac{-\sqrt{2}(1-i) + \sqrt{-4(2+i)}}{4} \\ &= \frac{-\sqrt{2}(1-i) + 2\sqrt{-2-i}}{4} \end{aligned}$$

Ora, si devono esprimere in forma algebrica!

Esercizio 3

$$z_{1,2} = \frac{-\sqrt{2}(1-i) + 2\sqrt{-2-i}}{4}$$

Dobbiamo calcolare le radici quadrate di $\Delta = -2 - i$. Si ha

- $|\Delta| = \sqrt{5}$
- $\Delta \in \text{III quadrante}$ con $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$
- $\theta = \arg\Delta = \pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ (non c'e' soluzione analitica)
- Forma trigonometrica: $\Delta = \sqrt{5}\,\text{cis}\,(\theta)$

Le radici di Δ sono

- $\Delta_0 = \sqrt{\sqrt{5}} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$
- $\Delta_1 = -\Delta_0$

Esercizio 3

Dal risultato

$$\Delta_0 \;=\; \sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

serve solo valutare $\sin$ e $\cos$ in $\frac{\theta}{2}$

Da $\Delta = -2 - i$, si ha

- $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ (permette di scegliere correttamente il segno)
- $\cos\theta \;=\; -\frac{2}{\sqrt{5}}$
- $\sin\theta \;=\; -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Esercizio 3

- $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ (permette di scegliere il segno delle)
- $\cos\theta \;=\; -\frac{2}{\sqrt{5}}$
- $\sin\theta \;=\; -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Dalle formule di bisezione si ha

- $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{3\pi}{4}$ ($\cos$ negativo e $\sin$ positivo)
- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \;=\; -\sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}} \;=\; -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \;=\; \sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}} \;=\; \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}}$

Esercizio 3

Da

$$\Delta_0 \;=\; \sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

e

- $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \;=\; -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$
- $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \;=\; \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}}$

si ha

$$\Delta_0 = \sqrt[4]{5}\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{\sqrt{5}-2} + i\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)$$

$$\Delta_1 = -\Delta_0$$

Esercizio 3

Pertanto le soluzioni sono

$$
\begin{aligned}
z_{1,2} &= \frac{-\sqrt{2}(1-i)+2\sqrt{-2-i}}{4} \\
&= \frac{-\sqrt{2}(1-i)\pm 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{\sqrt{5}-2}+i\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)}{4} \\
&= \begin{cases} \frac{-\sqrt{2}(1-i)+\sqrt{2}\left(-\sqrt{\sqrt{5}-2}+i\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)}{4} & = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-(1+\sqrt{\sqrt{5}-2})+i(1+\sqrt{\sqrt{5}+2})\right) \\ \frac{-\sqrt{2}(1-i)-\sqrt{2}\left(-\sqrt{\sqrt{5}-2}+i\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)}{4} & = \frac{\sqrt{2}}{4}\left((-1+\sqrt{\sqrt{5}-2})+i(1-\sqrt{\sqrt{5}+2})\right) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

> Risolvere la disequazione $|\overline{z} - a| \leqslant |\mathrm{Re}\,(z + a)|$ con $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$

Soluzione

Posto $z = x + iy$ si ha $|x - iy - a| \leqslant |x + a|$

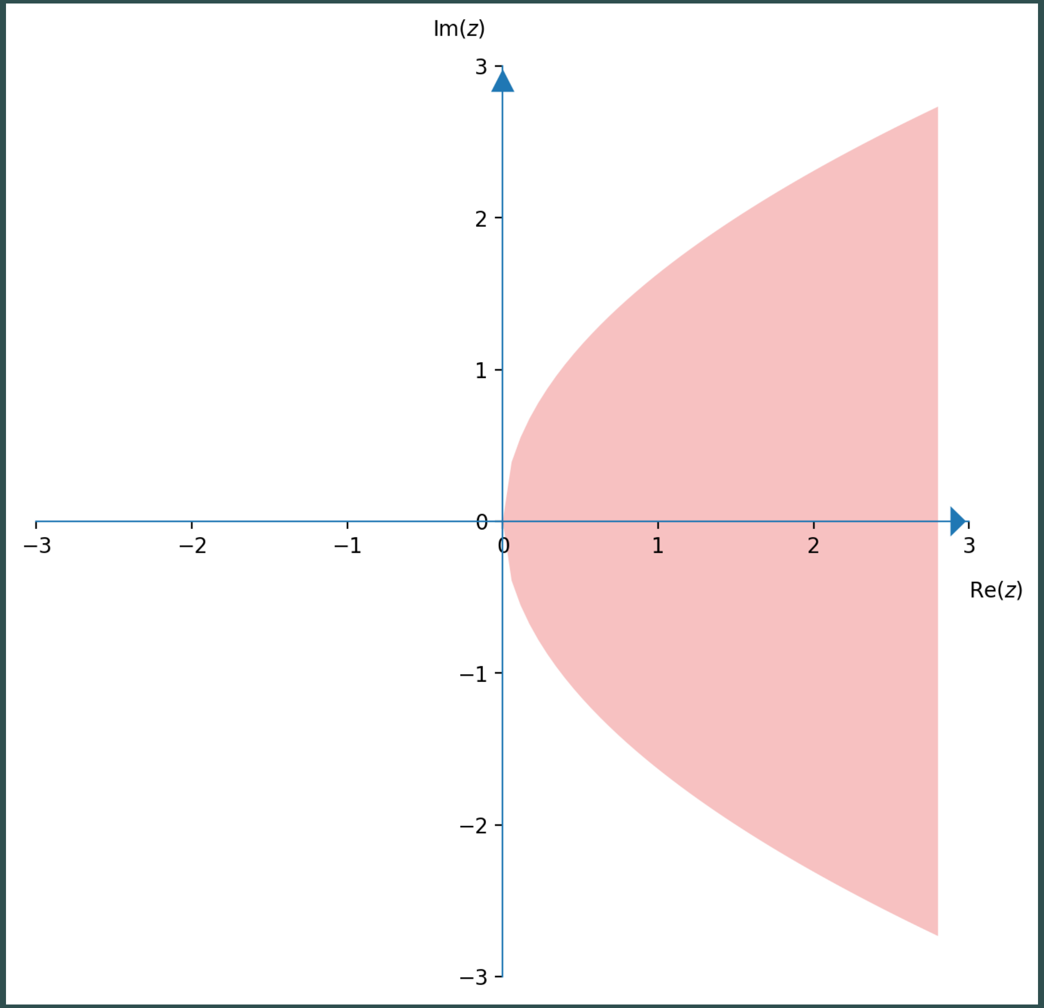
Elevando al quadrato (entrambi i termini sono positivi), si ha

$$
\begin{gathered}
(x - a)^2 + y^2 \leqslant (x + a)^2 \\
\cancel{x^2} - 2ax + \cancel{a^2} + y^2 \leqslant \cancel{x^2} + 2ax + \cancel{a^2} \\
y^2 \leqslant 4ax
\end{gathered}
$$

L'equazione $y^2 = 4ax$ rappresenta una parabola lungo l'asse x

Esercizio 4

La soluzione di $y^2 \leqslant 4ax$ (con $a > 0$ per ipotesi) è rappresenta in figura



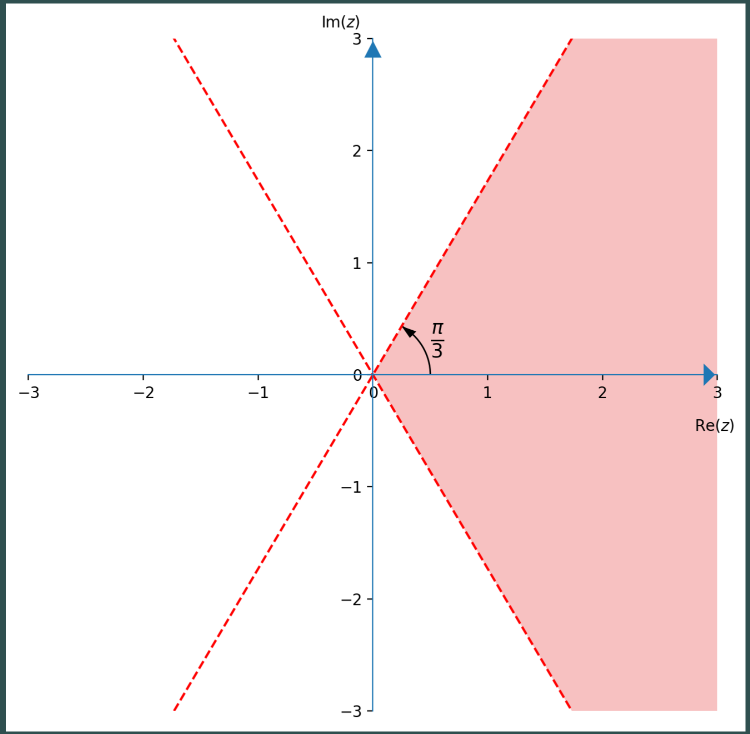
Esercizio 5

> Risolvere la disequazione $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$ e rappresentarla graficamente

Soluzione

Se $z = re^{i\theta}$ allora $\arg z = \theta$ e quindi

$$
\begin{aligned}
&|\arg z| < \frac{\pi}{3} \\
&\iff |\theta| < \frac{\pi}{3} \\
&\iff \left\{ -\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3} \right\}
\end{aligned}
$$



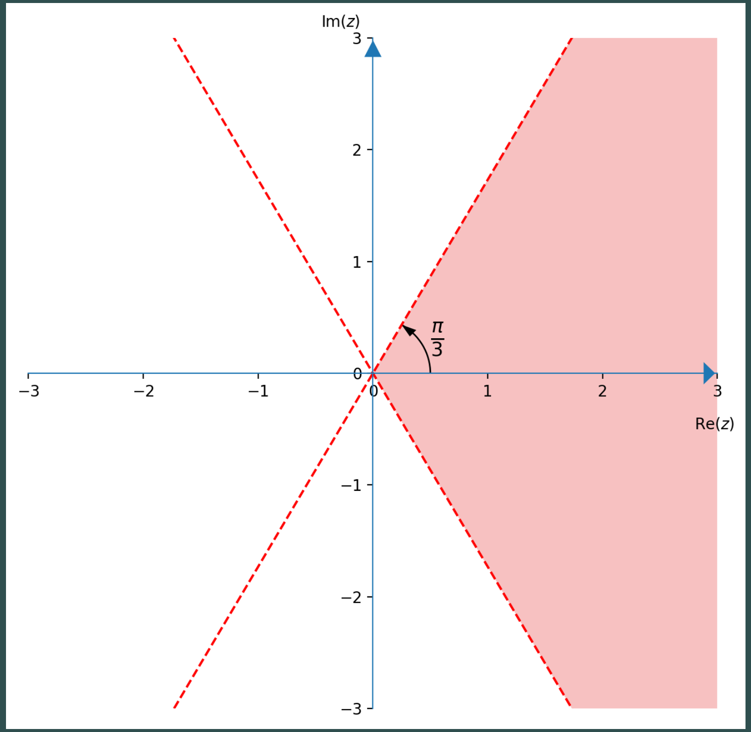
Esercizio 5

L'equazione $z = re^{i\theta_0}$ fissato θ_0 rappresenta una retta passante per l'origine con coefficiente angolare

$$m = \tan\theta_0$$

Quindi, la regione $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$ è limitata tra le rette di equazione

$$\begin{cases} y = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)x = \sqrt{3}x \\ y = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)x = -\sqrt{3}x \end{cases}$$



La soluzione può essere riscritta anche come

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) > 0 \\ -\sqrt{3}\,\mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z) < \sqrt{3}\,\mathrm{Re}(z) \end{cases}$$


FINE
Manolo Venturin