Esercizi parte III (B)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Indice degli esercizi (corso Analisi Matematica 1)

1. Risolvere l'equazione $z^3 + 3z - 2i = 0$ sapendo che ha una radice doppia
2. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Risolvere l'equazione $z^3 + az^2 + bz = 10$, sapendo che i è una radice.
3. Risolvere l'equazione $z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 10z + 6 = 0$ sapendo che $1 + i$ è una radice.
4. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Risolvere l'equazione $z^4 + az^3 + bz + cz = 12$ sapendo che $2i$ e 1 sono due radici.
5. Calcolare le radici di $z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1$

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Soluzione

Esercizio 1

> Risolvere l'equazione
>
> $$z^3 + 3z - 2i = 0$$
>
> sapendo che ha una radice doppia

Soluzione

Sia a la radice doppia e b l'altra radice, allora si ha

$$z^3 + 3z - 2i \;=\; (z-a)^2 \cdot (z-b) \;=\; z^3 + z^2(-2a-b) + z(a^2+2ab) - a^2 b$$

da cui

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a^2 + 2ab = 3 \\ a^2 b = 2i \end{cases}$$

Esercizio 1

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a^2 + 2ab = 3 \\ a^2 b = 2i \end{cases}$$

Sostituendo la I eq., $b = -2a$ nella II eq., $a^2 + 2ab = 3$ si ha

$$a^2 - 4a^2 = 3 \implies a^2 = -1 \implies a = \pm i$$

Ora $P(i) = 0$ e $P(-i) = +i - 3i - 2i = -4i \neq 0$

Quindi $a = i$ è la radice doppia e $b = -2i$ è l'altra radice

Esercizio 2

> Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Risolvere l'equazione
>
> $$z^3 + az^2 + bz = 10$$
>
> sapendo che i è una radice.

Soluzione

Essendo $P(z)$ a coefficienti reali, anche $P(-i)$ è radice di P

Quindi, dalle condizioni $P(i) = P(-i) = 0$, si ha

$$\begin{cases} -i - a + bi = 10 \\ i - a - bi = 10 \end{cases} \implies \begin{cases} -i - a + bi = 10 \\ -2a = 20 \end{cases} \implies \begin{cases} b = 1 \\ a = -10 \end{cases}$$

Quindi $P(z) = z^3 - 10z^2 + z - 10$

Esercizio 2

Quindi $P(z) = z^3 - 10z^2 + z - 10$ è divisibile per $(z-i)(z+i) = z^2 + 1$

Usano Ruffini, si ha

$$\begin{array}{cccc|cc}
z^3 & -10z^2 & +z & -10 & z^2 & +1 \\
\hline
-z^3 & +10z^2 & -z & +10 & z & -10 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}$$

cioè $z^3 - 10z^2 + z - 10 = (z^2+1)(z-10)$

La terza radice è $z = 10$

Esercizio 3

> Risolvere l'equazione
>
> $$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 10z + 6 = 0$$
>
> sapendo che $1 + i$ è una radice

Soluzione

Poiché $P(z)$ è un polinomio a coefficienti reali e $1 + i$ è una radice, lo è anche $1 - i$

Quindi $P(z)$ è della forma

$$P(z) = Q(z)\big(z - (1 + i)\big)\big(z - (1 - i)\big) = Q(z)(z^2 - 2z + 2)$$

Esercizio 3

$$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 10z + 6 = Q(z)(z^2 - 2z + 2)$$

Infatti, si ha

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
z^4 & -4z^3 & +9z^2 & -10z & +6 & z^2 & -2z & +2 \\
\hline
-z^4 & +2z^3 & -2z^2 & & & z^2 & -2z & +3 \\
\hline
0 & -2z^3 & +7z^2 & & & & & \\
 & +2z^3 & -4z^2 & +4z & & & & \\
\hline
 & 0 & +3z^2 & -6z & & & & \\
 & & -3z^2 & +6z & -6 & & & \\
\hline
 & & 0 & 0 & 0 & & &
\end{array}$$

Con l'algoritmo di Ruffini si trova $Q(z) = z^2 - 2z + 3$

Le due radici di $z^2 - 2z + 3$ sono $z_{1,2} = 1 + \sqrt{1-3} = 1 + \sqrt{-2} = 1 \pm \sqrt{2}i$

Esempio 4

> Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Risolvere l'equazione
>
> $$z^4 + az^3 + bz + cz = 12$$
>
> sapendo che $2i$ e 1 sono due zeri

Soluzione

Poiché $a, b, c \in \mathbb{R}$ allora oltre alla radice $2i$ c'è anche la radice $-2i$

Dalle condizioni $P(1) = P(2i) = P(-2i) = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 11 \\ 2i(c - 4a) - 4b = -4 \\ -2i(c - 4a) - 4b = -4 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 8 \end{cases}$$

Esempio 4

Dividendo

$$P(z) \;=\; z^4 + 2z^3 + z^2 + 8z - 12$$

per (radici $2i$, $-2i$ e 1)

$$(z-2i)(z+2i)(z-1) = (z^2+4)(z-1) = z^3 - z^2 + 4z - 4$$

si ha la fattorizzazione

$$P(z) \;=\; z^4 + 2z^3 + z^2 + 8z - 12 \;=\; (z^2+4)(z-1)(z+3)$$

da cui le radici

$$\{1, -3, \pm 2i\}$$

Esercizio 5

> Calcolare le radici di
>
> $$P(z) = z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1 = 0$$

Soluzione

Si ha (progressione geometrica di ragione z)

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

Infatti

$$(z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1)(z-1) = z^{n+1} + \cancel{z^n} + \ldots + \cancel{z^2} + \cancel{z} \quad - \cancel{z^n} - \ldots - \cancel{z^2} - \cancel{z} - 1 \; = \; z^{n+1} - 1$$

Quindi le radici di $P(z)$ sono tutte quelle di $z^{n+1} - 1$ (radici $n+1$-esime dell'unità) ad eccezione di 1 (radice di $z-1$, denominatore)


FINE
Manolo Venturin