Esercizi parte III (A)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Indice degli esercizi
(corso Analisi Matematica 1)

Descrivere il luogo geometrico:

1. $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$
2. $z^2 + \bar{z}^2 = 2$

Risolvere le equazioni

3. $\left(\dfrac{z+1}{z+i}\right)^4 = 1$
4. $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$
5. $\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\bar{z}}\right) \cdot \left(|z|^2 - 1\right) - i\bar{z} \cdot \mathrm{Im}(z) = 0$

Manolo Venturin

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Soluzione

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Esercizio 1

> Descrivere il luogo geometrico $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$

Soluzione

Posto $z = x + iy$ si ha

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = k \implies \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = k \implies \frac{-y}{x^2+y^2} = k$$

$$\implies x^2 + y^2 + \frac{y}{k} = 0 \implies x^2 + \left(y + \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4k^2}$$

Si tratta di una circonferenza di centro $\left(0, -\frac{1}{2k}\right)$ e raggio $\frac{1}{2|k|}$

Esercizio 2

> Descrivere il luogo geometrico $z^2 + \bar{z}^2 = 2$

Soluzione

Da

- $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2iy$
- $\bar{z}^2 = (x-iy)^2 = x^2 - y^2 - 2iy$

si ha

$$
\begin{gathered}
z^2 + \bar{z}^2 = 2 \\
(x^2 - y^2 + \cancel{2iy}) + (x^2 - y^2 - \cancel{2iy}) = 2 \\
x^2 - y^2 = 1
\end{gathered}
$$

Si tratta dell'equazione di un'iperbole

Esercizio 3

> Risolvere l'equazione
>
> $$\left(\frac{z+1}{z+i}\right)^4 = 1$$

Soluzione

Posto $u = \frac{z+1}{z+i}$, l'equazione diventa

$$u^4 = 1$$

le cui radici quarte sono

$$u_0 = 1, \quad u_0 = i, \quad u_0 = -1, \quad u_0 = -i$$

Esercizio 3

$$u_0 = 1, \quad u_0 = i, \quad u_0 = -1, \quad u_0 = -i$$

Ora si ha

$$\frac{z_k + 1}{z_k + i} = u_k \qquad \Longrightarrow \qquad z_k = \frac{iu_k - 1}{1 - u_k}$$

per cui

- $z_0 = \frac{iu_0 - 1}{1 - u_0} = \frac{i-1}{1-1}$ non ci sono soluzioni
- $z_1 = \frac{iu_1 - 1}{1 - u_1} = \frac{i^2 - 1}{1-i} = \frac{-2}{1-i} = -1 - i$
- $z_2 = \frac{iu_2 - 1}{1 - u_2} = \frac{-i-1}{1+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- $z_3 = \frac{iu_3 - 1}{1 - u_3} = \frac{-i^2 - 1}{1+i} = 0$

Esercizio 4

> Risolvere l'equazione
>
> $$z^6 + 7z^3 - 8 = 0$$

Soluzione

Posto $u = z^3$ l'equazione diventa

$$u^2 + 7u - 8 = 0$$

che ha soluzione

$$u_{0,1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{2} = \frac{-7 \pm 9}{2} = \begin{cases} \frac{-7+9}{2} = 1 \\ \frac{-7-9}{2} = -8 \end{cases}$$

Esercizio 4

Quindi, le equazioni da risolvere sono

$$z^3 = 1 = 1 \operatorname{cis} 0 \quad , \quad z^3 = -8 = 8 \operatorname{cis} \pi$$

da cui

$$z^3 = 1 \implies \left\{\operatorname{cis} 0,\ \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3},\ \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}\right\} = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

e

$$z^3 = -8 \implies \left\{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3},\ 2 \operatorname{cis} \pi,\ 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} = \{-2, 1 \pm \sqrt{3}\}$$

Esercizio 5

> Risolvere l'equazione
>
> $$\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)\cdot\left(|z|^2-1\right)-i\overline{z}\cdot\operatorname{Im}(z)=0$$

Soluzione

Posto $z=x+iy$, l'equazione diventa

$$\left(\frac{\overline{z}+z}{z\overline{z}}\right)\cdot(x^2+y^2-1)-i(x-iy)y=0$$

$$\left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}\right)\cdot(x^2+y^2-1)-(ix+y)y=0$$

$$\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\cdot(x^2+y^2-1)-(ix+y)y=0$$

Esercizio 5

Da

$$\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(x^2+y^2-1\right)-(ix+y)y=0$$

si ha il sistema di equazioni (parte reale ed immaginaria)

$$\begin{cases} \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(x^2+y^2-1\right)-y^2=0 \\ xy=0 \end{cases}$$

Nota: Osserviamo che deve esserci la condizione di esistenza

$$x^2+y^2\neq 0 \quad\implies\quad x\neq 0\ \wedge\ y\neq 0$$

i.e. $z=0$ non può essere soluzione

Esercizio 5

Dalla seconda equazione di

$$\begin{cases} \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(x^2+y^2-1\right)-y^2=0 \\ xy=0 \end{cases} \quad , \quad z\neq 0$$

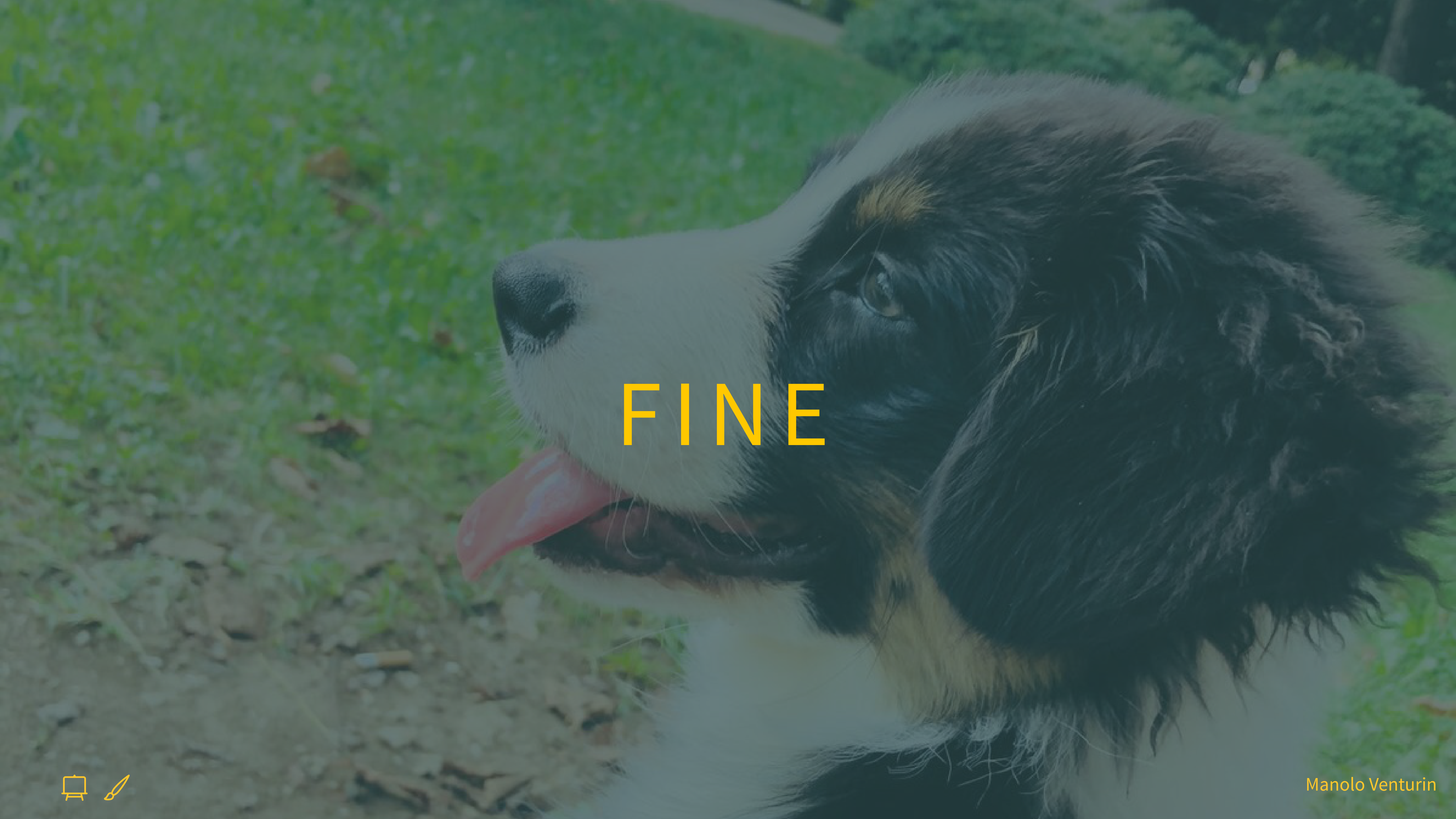
se $x=0$ si ha (sostituito nella prima) $y=0$ che però deve essere scartata

Se invece dalla seconda equazione sostiuiamo $y=0$ nella prima si ha

$$\frac{2x}{x^2}(x^2-1)=0 \implies x^2-1=0 \implies x=\pm 1$$

Quindi le soluzioni sono

$$z=(-1,0)=-1 \quad , \quad z=(1,0)=1$$


FINE
Manolo Venturin