Disequazioni algebriche

(Ordinamento e disequazioni)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ordinamento e disequazioni
- Disequazioni in campo complesso

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Ordinamento e disequazioni

Ordinamento

Ricordiamo che su $\mathbb{C}$ non è possibile definire un ordinamento

Quindi le seguenti scritture non hanno senso

$$1 + 2i > -1 - 2i$$
$$i < 2i$$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Disequazioni

Le disequazioni coinvolgono operazioni da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$ e sono del tipo

- Parte reale
- Parte immaginaria
- Modulo e argomento

Per la **risoluzione** tipicamente si risolvono con la sostituzione algebrica $z = a + bi$ (disequazioni a due incognite) e si rappresentano successivamente le soluzione nel piano di Gauss

Si ricordi che $|z - z_0| \leqslant r$, con $r > 0$, definisce un cerchio di centro z_0 e raggio r

Esempi

Esempio 1

> Risolvere la disequazione $\mathrm{Re}(z) \geqslant -2$ e rappresentarla graficamente

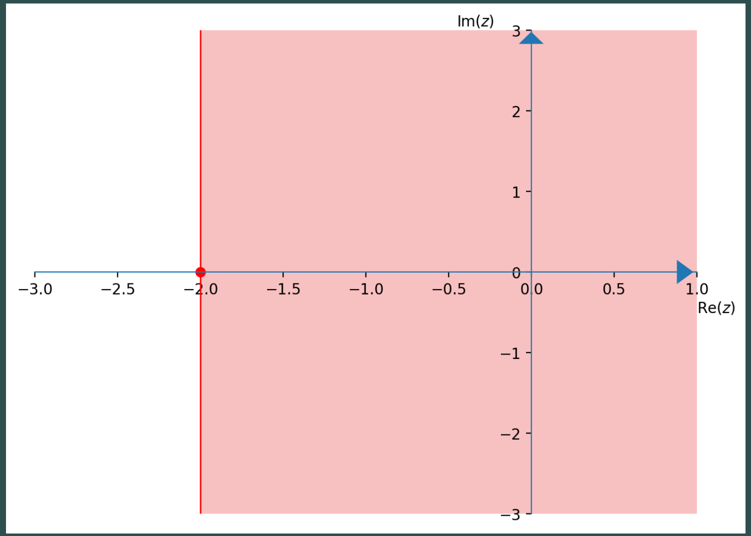
Soluzione

Se $z = x + iy$, la disequazione diventa

$$x \geqslant -2$$

cioè rappresenta il semipiano a destra della retta

$$x = -2$$



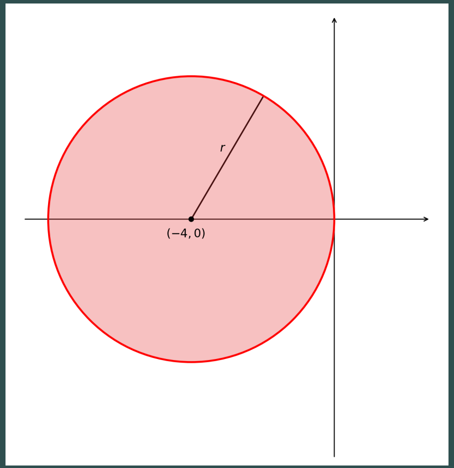
Esempio 2

> Risolvere la disequazione $\left|\frac{z-4}{z+2}\right| \geqslant 2$ e rappresentarla graficamente

Soluzione

Se $z = x + iy$ e $z \neq 2$, la disequazione diventa $|z-4| \geqslant 2\,|z+2|$ e ha soluzione

$$\begin{gathered}
\sqrt{(x-4)^2+y^2} \geqslant 2\sqrt{(x+2)^2+y^2} \\
\text{(elevando al quadrato)} \\
(x-4)^2+y^2 \geqslant 4\left((x+2)^2+y^2\right) \\
x^2-8x+16+y^2 \geqslant 4x^2+16x+16+4y^2 \\
3x^2+3y^2+24x \leqslant 0 \\
(x+4)^2+y^2 \leqslant 16
\end{gathered}$$



Rappresenta i punti interni ad una circonferenza di centro $(-4,0)$ e raggio 4

Esempio 2

Soluzione (alternativa)

Da $|z-4| \geqslant 2\,|z+2|$ elevando al quadrato e ricordano che $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ si ha

$$
\begin{gathered}
|z-4|^2 \geqslant 2^2|z+2|^2 \\
(z-4)\overline{(z-4)} \geqslant 4(z+2)\overline{(z+2)} \\
(z-4)(\overline{z}-4) \geqslant 4(z+2)(\overline{z}+2) \\
z\overline{z}-4z-4\overline{z}+16 \geqslant 4\left(z\overline{z}+2z+2\overline{z}+4\right) \\
-3z\overline{z}-12z-12\overline{z} \geqslant 0 \\
z\overline{z}+4z+4\overline{z} \leqslant 0 \\
(z+4)(\overline{z}+4)-16 \leqslant 0 \\
(z+4)\overline{(z+4)} \leqslant 4^2 \\
|z+4| \leqslant 4
\end{gathered}
$$

Esempio 3

> Risolvere la disequazione
>
> $$\left||z-2|^2-|\operatorname{Im}(z)|^2-1\right| \geqslant -\operatorname{Im}(z)+3$$

Soluzione

Posto $z=x+iy$ la disequazione diventa

$$\left||z-2|^2-|\operatorname{Im}(z)|^2-1\right| \geqslant -\operatorname{Im}(z)+3$$
$$\left|(x-2)^2+\cancel{y^2}-\cancel{y^2}-1\right| \geqslant -y+3$$
$$y \geqslant 3-\left|(x-2)^2-1\right| = 3-\left|x^2-4x+3\right|$$

Esempio 3

$$y \geqslant 3 - \left|x^2 - 4x + 3\right|$$

Risolviamo il modulo.

- $x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 = \{1,\ 3\}$
- $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \{x \leqslant 1\} \ \vee \ \{x \geqslant 3\}$

Quindi, la disequazione diventa

$$y \geqslant 3 - \left|x^2 - 4x + 3\right| \ = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{se } \{x \leqslant 1\} \ \vee \ \{x \geqslant 3\} \\ x^2 - 4x + 6 & \text{se } 1 < x < 3 \end{cases}$$

Esempio 3

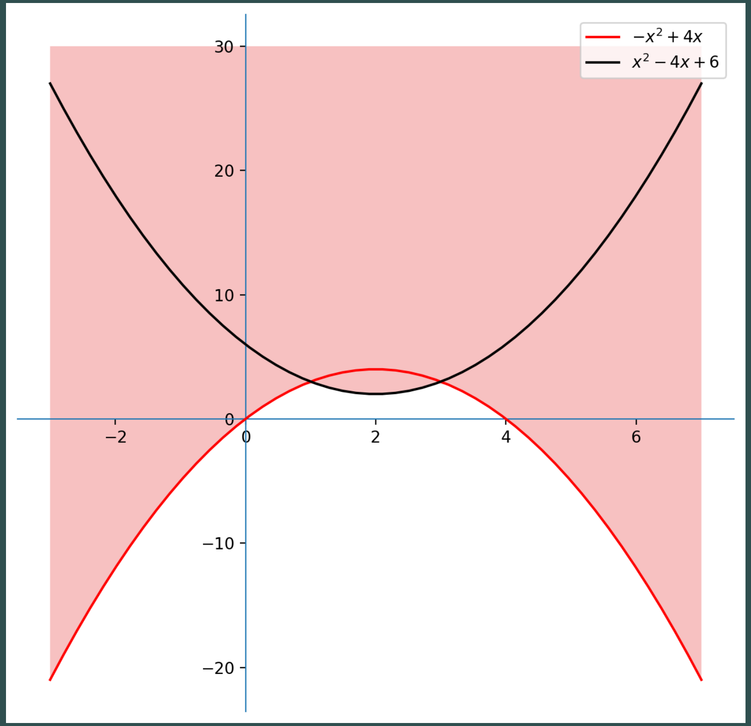
Definito

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{se } \{x \leqslant 1\} \ \vee \ \{x \geqslant 3\} \\ x^2 - 4x + 6 & \text{se } 1 < x < 3 \end{cases}$$

La soluzione è

$$\mathcal{A} = \{z = x + iy \in \mathcal{C} : \ y \geqslant f(x)\}$$

Nota: Disegno le due parabole (dalla concavità e dal vertice)



Esempio 4

Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) \geqslant \mathrm{Im}(z) \\ |\bar{z} - i| \leqslant 2 \end{cases}$$

Soluzione

Caso $\mathrm{Re}(z) \geqslant \mathrm{Im}(z)$

Posto $z = x + iy$ si ha

$$\mathrm{Re}(z) \geqslant \mathrm{Im}(z) \quad \Longrightarrow \quad y \geqslant x$$

Rappresenta la regione sopra la bisettrice del I-III quadrante

Esempio 4

Caso $|\overline{z} - i| \leqslant 2$

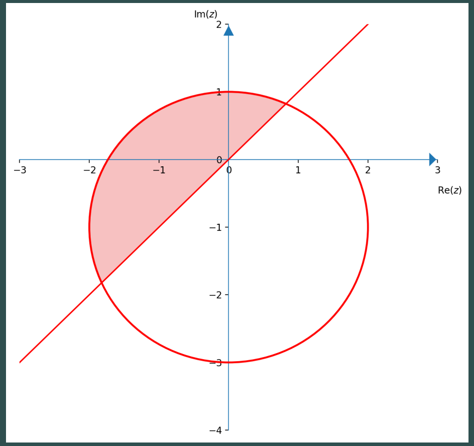
Si ha

$$|\overline{z} - i| \leqslant 2 \iff \left|\overline{z + i}\right| \leqslant 2 \iff |z - (-i)| \leqslant 2$$

Quindi rappresenta la regione interna ad un cerchio di centro $z_0 = -i$ e raggio 2

Soluzione finale

Intersecando le due condizioni $y \geqslant x$ e $|z + i| \leqslant 2$ si ha l'area rappresentata in figura




FINE
Manolo Venturin