

Equazioni algebriche

(Radice di un polinomio / Teorema fondamentale dell'algebra e conseguenze)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~

# Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Radice di un polinomio
- Teorema fondamentale dell'algebra

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Radice di un polinomio

Dato il polinomio  $P(z)$ , allora

- $\alpha$  si dice **radice** sse  $P(\alpha) = 0$
- $\alpha$  è una **radice di molteplicità  $n$**  sse  $P(z)$  è divisibile per  $(z - \alpha)^n$  ma non è divisibile per  $(z - \alpha)^{n+1}$

## Esempio

Il polinomio

$$P(z) = z(z - \beta)^2(z - \alpha)^3$$

ha

- una radice  $0$  di molteplicità  $1$ :  $z$
- una radice  $\beta$  di molteplicità  $2$ :  $(z - \beta)^2$
- una radice  $\alpha$  di molteplicità  $3$ :  $(z - \alpha)^3$



# Teorema fondamentale dell'algebra (senza dimostrazione)

Il polinomio

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

di grado  $n \geq 1$  ha almeno una radice (reale o complessa)  $\alpha$ , i.e.

$$P(\alpha) = 0$$

I coefficienti  $a_n, \dots, a_1, a_0$  possono essere sia reali che complessi

# Conseguenza 1

Un qualsiasi polinomio  $P$  di grado  $n$ , i.e.  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ , ammette  $n$  radici (reali o complesse con le relative molteplicità), i.e.

$$P(z) = a_n (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

## Dimostrazione

Se  $z_1$  è una radice di  $P(z)$  allora per il teorema di Ruffini posso scrivere

$$P(z) = Q(z)(z - z_1)$$

dove  $Q(z)$  è un polinomio di grado  $n - 1$

Reiterando il procedimento segue la tesi

# Conseguenza 2

Sia  $P(z)$  un polinomio a coefficienti reali. Se  $\alpha \in \mathbb{C}$  è una radice del polinomio, cioè  $P(\alpha) = 0$  allora anche  $P(\overline{\alpha}) = 0$

## Dimostrazione

Infatti, se

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

e  $P(\alpha) = 0$  allora  $\overline{P(\alpha)} = 0$

# Conseguenza 2

Quindi

$$\begin{aligned}\overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{z}^n + \dots + a_1 \overline{z} + a_0\end{aligned}$$

si ha

$$0 = \overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha})$$



# Conseguenza 3

Se i coefficienti di  $P$  sono reali e il grado di  $P$  è dispari, allora  $P$  ha almeno una radice reale

## Dimostrazione

Segue dalla conseguenza 2, infatti si ha che le radici complesse di un polinomio a coefficienti reali si presentano come coppie di complessi coniugati

# Osservazione sull'equazione di II grado

La soluzione di

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

è

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Nota:** Il segno  $\pm$  davanti alla radice quadrata è superfluo perché  $\sqrt{\cdot}$  nel campo complesso ha due valori, uno opposto all'altro

# Equazioni algebriche (strategia risolutiva)

1. Approccio “diretto” (esempio nei polinomi)
2. Sostituzione algebrica  $z = a + bi$  (una equazione per la parte reale ed una per la parte immaginaria)
3. Sostituzione trigonometrica o esponenziale

**Nota:** I risultati ottenuti si possono poi interpretare graficamente nel piano di Gauss

# Esempi

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento



# Esempio 1

Risolvere l'equazione

$$z^2 - 2z - i\sqrt{3} = 0$$

## Soluzione

$$z_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-i\sqrt{3})}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4i\sqrt{3}}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 + i\sqrt{3}}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + i\sqrt{3}}$$

Indichiamo con  $\Delta = 1 + i\sqrt{3}$ , allora

- $|\Delta| = \sqrt{1 + 3} = 2$
- $\Delta \in \text{I quadrante}$
- $\theta = \arg \Delta = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
- Forma trigonometrica:  $\Delta = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$



# Esempio 1

Le radici di  $\Delta$  sono:  $\Delta_{0,1} = \sqrt{2} \cdot \text{cis} \left( \frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1$

- $\Delta_0 = \sqrt{2} \cdot \text{cis} \left( \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$
- $\Delta_1 = -\Delta_0$

Pertanto la soluzione è

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\Delta} = 1 \pm \sqrt{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \begin{cases} 1 + \sqrt{\frac{3}{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

# Esempio 2

Risolvere l'equazione  $z^2 - 2z - i\sqrt{3} = 0$  mediante la sostituzione  $z = a + bi$

## Soluzione

Si tratta dell'esempio 1 risolto con la sostituzione del numero complesso in forma algebrica

Questo esempio vuole mostrare la difficoltà di praticare questo tipo di strada nel cercare la soluzione

# Esempio 2

Se  $z = a + bi$ , l'equazione  $z^2 - 2z - i\sqrt{3} = 0$  diventa

$$\begin{aligned}(a + bi)^2 - 2(a + bi) - i\sqrt{3} &= 0 \\ a^2 - b^2 + 2abi - 2a - 2bi - i\sqrt{3} & \\ (a^2 - b^2 - 2a) + i(2ab - 2b - \sqrt{3}) &= 0\end{aligned}$$

che corrisponde al sistema di equazioni (parte reale ed immaginaria)

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - 2a = 0 \\ 2ab - 2b - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$ , la cui soluzione è

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - 2a = 0 \\ 2ab - 2b - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b^2 = a^2 - 2a \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2(a-1)} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{3}{4(a-1)^2} = a^2 - 2a \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2(a-1)} \end{cases}$$



# Esempio 2

da cui (non per nulla facile)

$$\begin{aligned}\frac{3}{4(a^2 - 1)} = a^2 - 2a &\iff 4a^4 - 16a^3 + 20a^2 - 8a - 3 = 0 \\ &\iff (2a^2 - 4a - 1) \cdot (2a^2 - 4a + 3) = 0\end{aligned}$$

che ha soluzione

$$\begin{aligned}a_{1,2} &= 1 \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \quad (\text{da scartare perchè non è reale, in realtà porta anch'essa alla soluzione}) \\ a_{3,4} &= 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

# Esempio 2

## Soluzione 1

Per  $a = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}$  si ha  $b = \frac{\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{\frac{3}{2}} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  da cui  $z = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

## Soluzione 2

Per  $a = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}$  si ha  $b = \frac{\sqrt{3}}{2(1 - \sqrt{\frac{3}{2}} - 1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  da cui  $z = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

E' evidente che il metodo non è affatto vantaggioso rispetto al metodo diretto dove è stata applicata la formula risolutiva di un'eq. di II grado

# Esempio 3

Determinare il parametro  $\alpha \in \mathbb{C}$  in modo che  $z_0 = -i$  sia una radice di

$$P(z) = z^3 - \alpha z^2 + (2 + i)z - 2$$

e determinare inoltre le restanti due radici (in forma algebrica)

## Soluzione

Per  $z_0 = -i$  si ha

$$P(-i) = (-i)^3 - \alpha(-i)^2 + (2 + i)(-i) - 2 = 0$$

$$\iff i + \alpha - 2i + 1 - 2 = 0$$

$$\iff \alpha - i - 1 = 0 \implies \alpha = 1 + i$$

da cui

$$P(z) = z^3 - (1 + i)z^2 + (2 + i)z - 2$$



# Esempio 3

Dividiamo  $P(z) = z^3 - (1 + i)z^2 + (2 + i)z - 2$  per  $z + i$ , utilizzando Ruffini si ha

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1-i & 2+i & -2 \\ -i & & -i & -2+i & +2 \\ \hline & 1 & -1-2i & 2i & 0 \end{array}$$

e, quindi si ha la fattorizzazione

$$P(z) = (z + i) \cdot (z^2 - (1 + 2i)z + 2i)$$

Le restanti due radici sono le soluzioni di  $z^2 - (1 + 2i)z + 2i = 0$  cioè

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{1 + 2i \pm \sqrt{(1 + 2i)^2 - 8i}}{2} = \frac{1 + 2i \pm \sqrt{1 + 4i - 4 - 8i}}{2} = \frac{1 + 2i \pm \sqrt{(1 - 2i)^2}}{2} \\ &= \frac{1 + 2i \pm (1 - 2i)}{2} = \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$



FINE