Luoghi geometrici notevoli

(Coordinate complesse coniugate / Esempi notevoli: retta e circonferenza)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Luoghi geometrici notevoli
  - Coordinate complesse coniugate
- Esempi notevoli
  - Retta orizzontale
  - Retta verticale
  - Circonferenza di centro C e raggio r

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Coordinate complesse coniugate

La trasformazione

$$\begin{cases} x &= \mathrm{Re}(z) &= \frac{z+\overline{z}}{2} \\ y &= \mathrm{Im}(z) &= \frac{z-\overline{z}}{2i} \end{cases}$$

stabilisce una rappresentazione dei punti del piano (x, y) attraverso il numero complesso $z = x + iy$ e il suo coniugato $\overline{z} = x - iy$

Nota: Per la notazione algebrica si preferisce la scrittura $z = x + iy$ invece della $z = a + bi$ per agevolare l'interpretazione grafica dei risultati

Esempi notevoli

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Retta orizzontale

La retta orizzontale è un'equazione del tipo

$$y \;=\; c, \quad c \in \mathbb{R}$$

che espressa in coordinate complesse diventa

$$y = \frac{z - \overline{z}}{2i} = c \iff z - \overline{z} = i2c \iff z - \overline{z} = i\,\mathrm{Im}\,(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Eseguiamo la verifica. Infatti, se $z = x + iy$ e $\alpha = a + bi$ si ha

$$z - \overline{z} = i\,\mathrm{Im}\,(\alpha) \implies \cancel{x} + iy - (\cancel{x} - iy) = ib \implies 2\cancel{i}\,y = \cancel{i}\,b \implies y = \frac{b}{2}$$

Retta verticale

La retta verticale è un'equazione del tipo

$$x \;=\; c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

che espressa in coordinate complesse diventa

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2} = c \iff z+\overline{z} = 2c \iff z+\overline{z} = \operatorname{Re}(\alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Eseguiamo la verifica. Infatti, se $z = x + iy$ e $\alpha = a + bi$ si ha

$$z+\overline{z} = \operatorname{Re}(\alpha) \implies x + \cancel{iy} + (x - \cancel{iy}) = a \implies 2x = a \implies x = \frac{a}{2}$$

Circonferenza di centro C e raggio r

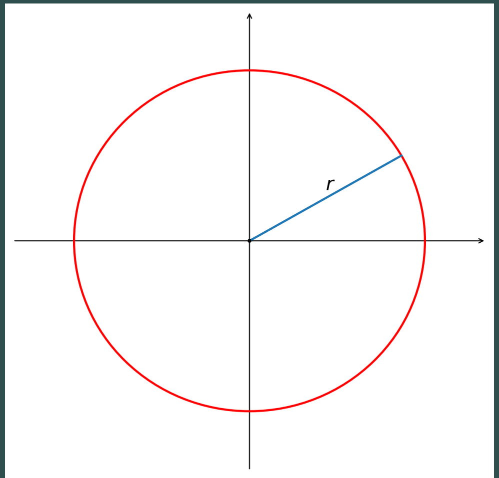
L'equazione

$$|z - z_0| = r \geqslant 0$$

rappresenta una circonferenza con centro $z_0 = (x_0, y_0)$ e raggio r

Infatti, posto $z = x + iy$ ed elevando al quadrato si ha

$$|z - z_0|^2 = r^2 \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



Circonferenza di centro C e raggio r

Un'altra forma è la seguente.

Da $|z - z_0| = r \geqslant 0$, possiamo scrivere

$$|z - z_0|^2 = r^2 \iff (z - z_0) \cdot \overline{(z - z_0)} = r^2 \iff (z - z_0) \cdot (\overline{z} - \overline{z_0}) = r^2$$

da cui

$$z\overline{z} - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} = r^2 \iff z\overline{z} - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} = c^2$$

dove $c^2 = r^2 - |z_0|^2$

Esempi

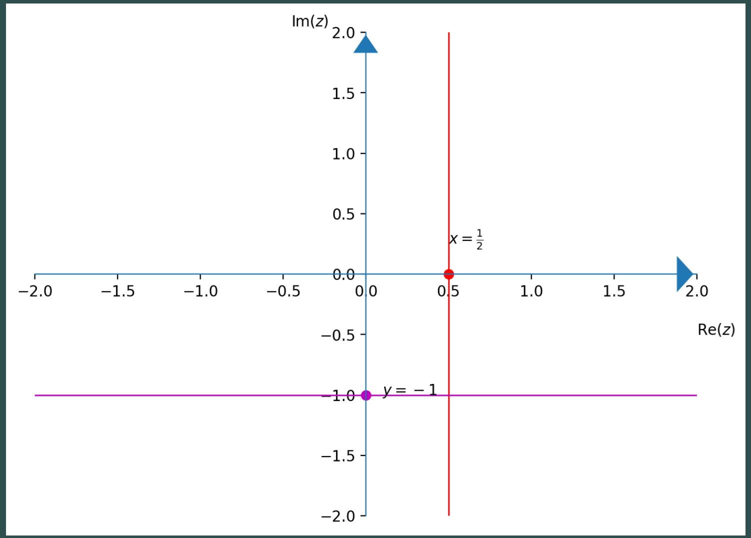
Esempio 1

> Rappresentare le rette
>
> 1. $z+\overline{z}=\operatorname{Re}(1-2i)$ e
> 2. $z-\overline{z}=i\operatorname{Im}(1-2i)$

Soluzione

Posto $z=x+iy$ si ha

- $z+\overline{z}=2x$ da cui
  $2x=1 \implies x=\frac{1}{2}$
- $z-\overline{z}=2iy$ da cui
  $2iy=i\cdot(-2) \implies y=-1$



Esempio 2

> Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C = (-2, 1)$ e passante per l'origine

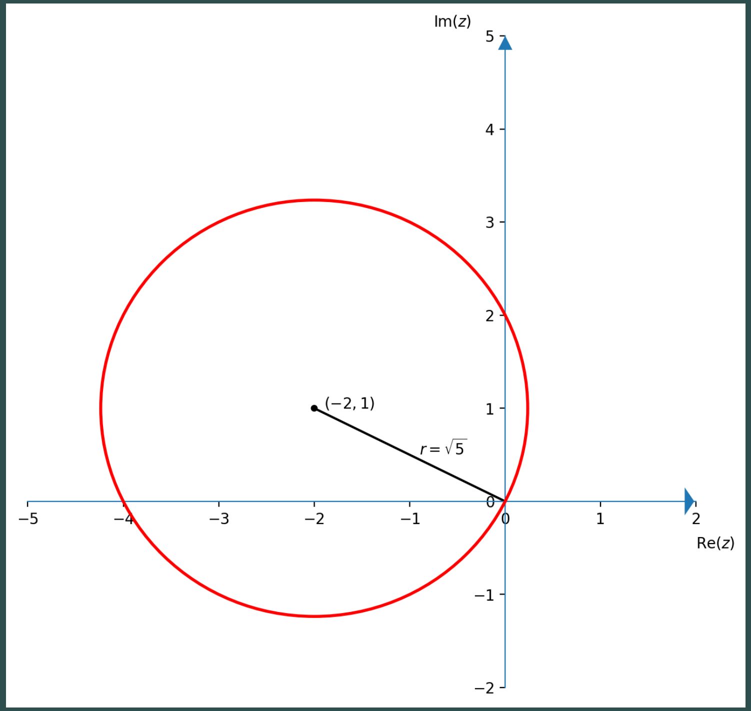
Soluzione

Posto $z_0 = -2 + i$, il raggio della circonferenza è

$$r = |z_0| \; = \; \sqrt{4+1} \; = \; \sqrt{5}$$

Quindi, l'equazione della circonferenza è

$$|z - z_0| \; = \; \sqrt{5}$$



Esempio 3

> Descrivere il luogo geometrico $\operatorname{Re}\left(z^2\right) = k^2$ con $k \in \mathbb{R}$

Soluzione

Posto $z = x + iy$ si ha

$$\operatorname{Re}\left(z^2\right) = k^2 \implies \operatorname{Re}\left((x+iy)^2\right) = k^2 \implies \operatorname{Re}\left(x^2 - y^2 + i2xy\right) = k^2$$
$$\implies x^2 - y^2 = k^2 \implies \frac{x^2}{k^2} - \frac{y^2}{k^2} = 1$$

Rappresenta l'equazione di un'iperbole


FINE
Manolo Venturin