$$\sum_{k=1}^{n} \cos\left(kx\right) \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} \sin\left(kx\right)$$

Numeri complessi (difficile/inusuale)

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Premessa (corso Analisi Matematica 1)

Ricordiamo le seguenti sommatorie notevoli (progressione geometrica di ragione q)

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - 1 = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1 = q\frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{se } q \neq 1$$

e le relazioni del seno e coseno con l'esponenziale complesso

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad , \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizio 1

Calcolare

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \cos x + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx)$$

Soluzione

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) &= \cos x + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{ix} + e^{i2x} + \ldots + e^{inx}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)\end{aligned}$$

Esercizio 1

Ricordando i risultati sulla progressione geometrica di ragione $q = e^{ix}$ si ha

- se $q \neq 1$

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(e^{ix}\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)$$

- se $q = 1$ i.e. $x = 0 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = n$$

Ora andiamo a semplificare / valutare la prima espressione

Esercizio 1

$$\mathrm{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)$$

Si ha

$$\begin{aligned} 1-e^{inx} &= e^{inx/2}\left(e^{-inx/2}-e^{inx/2}\right) = -2ie^{inx/2}\left(\frac{e^{inx/2}-e^{-inx/2}}{2i}\right) \\ &= -2ie^{inx/2}\sin\left(nx/2\right) \end{aligned}$$

$$1-e^{ix} = e^{ix/2}\left(e^{-ix/2}-e^{ix/2}\right) = -2ie^{ix/2}\sin\left(x/2\right)$$

Quindi, per $x \neq k2\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{ix}\frac{\cancel{(-2i)}\,e^{inx/2}}{\cancel{(-2i)}\,e^{ix/2}}\frac{\sin\left(nx/2\right)}{\sin\left(x/2\right)} = e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\left(nx/2\right)}{\sin\left(x/2\right)}$$

Esercizio 1

$$e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$$

Per cui, per $x \neq k2\pi$, si ha

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right) = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$$

Quindi la soluzione è

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \begin{cases} \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} & \text{se } x \neq k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ n & \text{se } x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esercizio 2

> Calcolare
>
> $$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx)$$

Soluzione

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) &= \sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx) \\ &= \operatorname{Im}\left(e^{ix} + e^{i2x} + \ldots + e^{inx}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)\end{aligned}$$

Esercizio 2

Ricordando i risultati sulla progressione geometrica di ragione $q = e^{ix}$ si ha

- se $q \neq 1$

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(e^{ix}\right)^{k}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{ix}\,\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)$$

- se $q = 1$ i.e. $x = 0 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = 0$$

Ora andiamo a semplificare / valutare la prima espressione

Esercizio 2

Dal un risultato intermedio dell'esercizio precedente, si ha

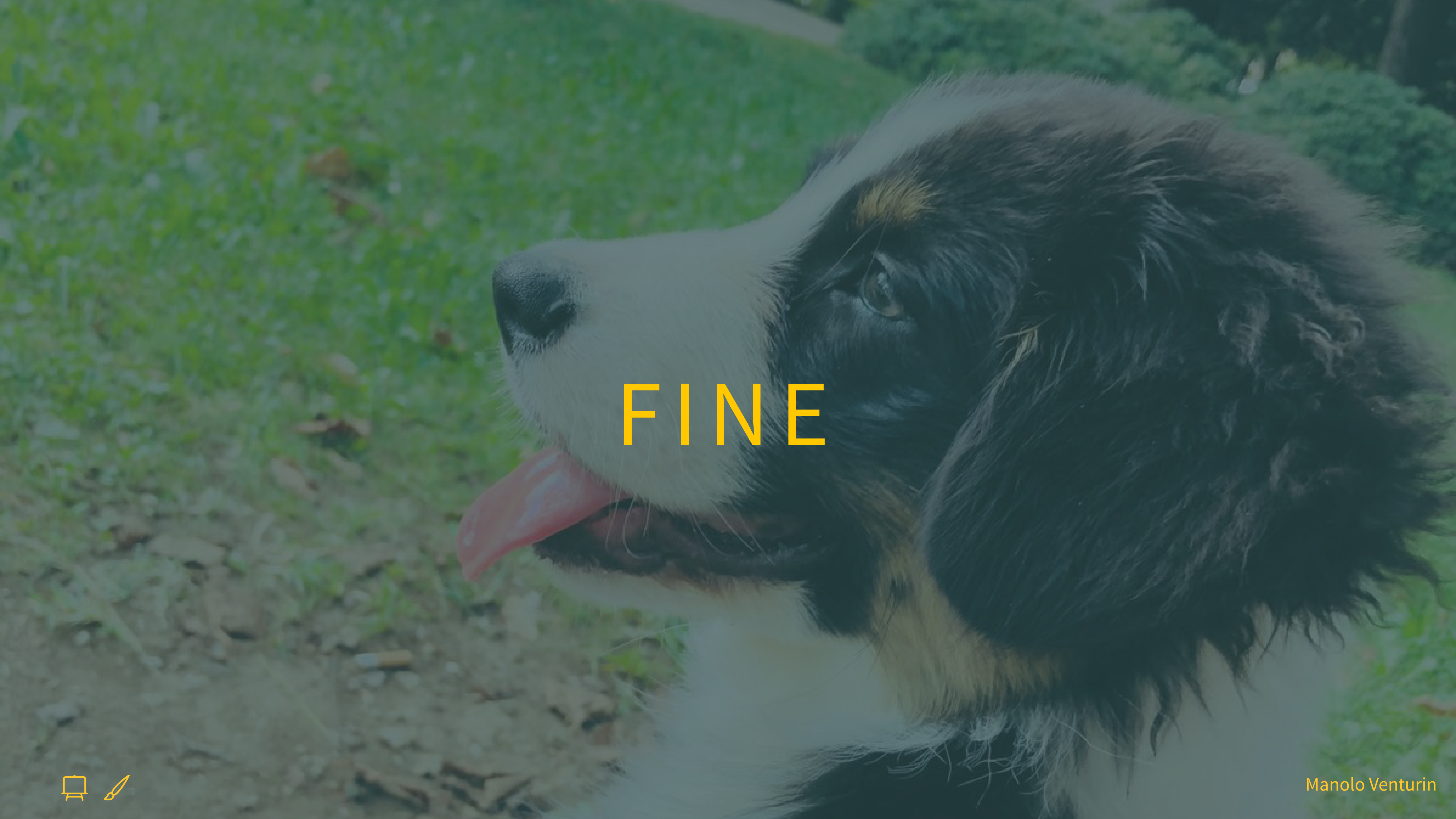
$$e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$$

Per cui, per $x \neq k2\pi$, si ha

$$\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right) = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$$

Quindi la soluzione è

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \begin{cases} \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} & \text{se } x \neq k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{se } x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



FINE