Esercizi parte 2 (B)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Indice degli esercizi (corso Analisi Matematica 1)

1. Risolvere $z^4 + 16 = 0$
2. Risolvere $2(z-1)^3 - 16 = 0$
3. Risolvere l'equazione $z^3 = i$, visualizzare le soluzioni e scrivere la relativa fattorizzazione
4. Dimostrare che $\cos(5x) = 5\cos x \sin^4 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + \cos^5 x$
5. Dimostrare che $\sin(4x) = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$
6. Dimostrare che $\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(-4\cos(2x) + \cos(4x) + 3\right)$

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Soluzione

Esercizio 1

Risolvere

$$z^4 + 16 = 0$$

Esercizio 1

Soluzione

Da $z^4+16=0$ si ha $z^4=-16=16\operatorname{cis}(\pi)$

Le radici z_k sono

$$z_k \;=\; 16^{\frac{1}{4}}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right), \qquad k=0,1,2,3$$

i.e.

- $z_0 \;=\; 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{4} \;=\; 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \;=\; \sqrt{2}(1+i)$
- $z_1 \;=\; 2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4} \;=\; 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \;=\; \sqrt{2}(-1+i)$
- $z_2 \;=\; 2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4} \;=\; 2\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \;=\; \sqrt{2}(-1-i)$
- $z_3 \;=\; 2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4} \;=\; 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \;=\; \sqrt{2}(1-i)$

Esercizio 2

Risolvere

$$2(z-1)^3 - 16 = 0$$

Esercizio 2

Soluzione

Posto $u = z - 1$ l'equazione $2(z-1)^3 - 16 = 0$ diventa $u^3 = 8$

Da $8 = 8\,\text{cis}\,(0)$ si hanno le radici:

$$u_k \;=\; 8^{\frac{1}{3}} \cdot \text{cis}\left(\frac{0 + k2\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

cioè

- $u_0 = 2 \implies z_0 = 2 + 1 = 3$
- $u_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i \implies z_1 = -1 + \sqrt{3}i + 1 = \sqrt{3}i$
- $u_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i \implies z_2 = -1 - \sqrt{3}i + 1 = -\sqrt{3}i$

Esercizio 3

> Risolvere l'equazione $z^3 = i$, visualizzare le soluzioni e scrivere la relativa fattorizzazione

Esercizio 3

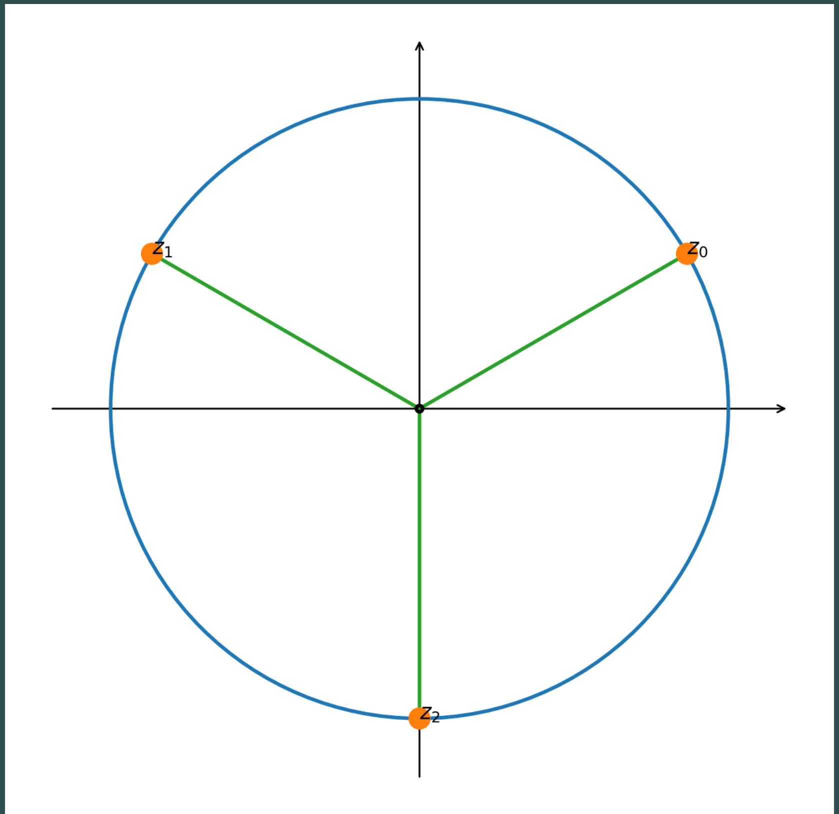
Soluzione

Da $i = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ si ha

$$z_k = \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + k2\pi}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi + k4\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

- $z_0 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$

Esercizio 3



Si ha la seguente fattorizzazione

$$z^3 - i \;=\; 1 \cdot (z - z_0) \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \;=\; (z + i)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

Manolo Venturin

Esercizio 4

> Dimostrare che
>
> $$\cos(5x) = 5\cos x \sin^4 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + \cos^5 x$$

Soluzione

Si ha

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \operatorname{Re}\left(e^{i5x}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^5\right) \\
&= \operatorname{Re}\left((\cos x + i\sin x)^5\right) \\
&= \operatorname{Re}\big(\cos^5 x + 5i\cos^4 x \sin x - 10\cos^3 x \sin^2 x \\
&\quad -10i\cos^2 x \sin^3 x + 5\cos x \sin^4 x + i\sin^5 x\big) \\
&= \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x
\end{aligned}$$

Esempio 5

> Dimostrare che
>
> $$\sin(4x) = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$$

Soluzione

Si ha

$$\begin{aligned}
\sin(4x) &= \operatorname{Im}\left(e^{i4x}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\left(e^{ix}\right)^4\right) \\
&= \operatorname{Im}\left((\cos x + i\sin x)^4\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\cos^4 x + 4i\cos^3 x\sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x\right) \\
&= 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x
\end{aligned}$$

Esempio 6

> Dimostrare che
>
> $$\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(-4\cos\left(2x\right) + \cos\left(4x\right) + 3\right)$$

Soluzione

Si ha

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2}\right) - \frac{4}{8}\left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) + \frac{6}{16}$$
$$= \frac{1}{8}\left(\cos\left(4x\right) - 4\cos\left(2x\right) + 3\right)$$

FINE

Manolo Venturin