Esercizi parte 2 (A)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Indice degli esercizi (corso Analisi Matematica 1)

1. Scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi (espressi in forma algebrica)

$$z = -1 + \sqrt{3}i \quad , \quad z = -\sqrt{2}i \quad , \quad z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \quad , \quad z = -\sqrt{3} - i$$

2. Scrivere in forma trigonometrica e algebrica i seguenti numeri complessi (espressi in forma esponenziale)

$$z = -34e^{\left(i\frac{\pi}{2}\right)} \quad , \quad z = \sqrt{2}e^{\left(-i\frac{3\pi}{4}\right)} \quad , \quad z = -2e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)} \quad , \quad z = 4e^{\left(-i\frac{\pi}{2}\right)}$$

3. Calcolare $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$ e $\left(\sqrt{3}+i\right)^{-6}$
4. Trovare le radici seste di 1 e rappresentarle graficamente
5. Trovare le radici ottave di 1 e rappresentarle graficamente

Manolo Venturin

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Soluzione

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Esercizio 1

> Scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi (espressi in forma algebrica)
>
> 1. $z = -1 + \sqrt{3}i$
> 2. $z = -\sqrt{2}i$
> 3. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$
> 4. $z = -\sqrt{3} - i$

Soluzione

Ricordiamo che

Forma algebrica $\Longrightarrow$ **Forma trigonometrica** $\Longrightarrow$ **Forma esponenziale**

Esercizio 1

Soluzione 1

Da $z = -1 + \sqrt{3}i$ si ha

- $|z| = \sqrt{1+3} = 2$
- $z \in \text{II quadrante}$
- $\theta = \arg z = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$
- $z = 2\,\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{\left(i\,\frac{2\pi}{3}\right)}$

Esercizio 1

Soluzione 2

Da $z = -\sqrt{2}i$ si ha

- $|z| \;=\; \sqrt{2}$
- z è immaginario puro (negativo)
- $\theta \;=\; \arg z \;=\; -\frac{\pi}{2}$
- $z \;=\; \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \sqrt{2}e^{\left(-i\frac{\pi}{2}\right)}$

Esercizio 1

Soluzione 3

Da $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ si ha

- $|z| = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}+9}{4}} = \sqrt{3}$
- $z \in \text{IV quadrante}$
- $\theta = \arg z = \arctan\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$
- $z = \sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)}$

Esercizio 1

Soluzione 4

Da $z = -\sqrt{3} - i$ si ha

- $|z| = \sqrt{3+1} = 2$
- $z \in \text{III quadrante}$
- $\theta = \arg z = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$
- $z = 2\,\mathrm{cis}\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{\left(-i\,\frac{5\pi}{6}\right)}$

Esercizio 2

> Scrivere in forma trigonometrica e algebrica i seguenti numeri complessi (espressi in forma esponenziale)
>
> 1. $z = -34e^{\left(i\frac{\pi}{2}\right)}$
> 2. $z = \sqrt{2}e^{\left(-i\frac{3\pi}{4}\right)}$
> 3. $z = -2e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)}$
> 4. $z = 4e^{\left(-i\frac{\pi}{2}\right)}$

Soluzione

Ricordiamo che

Forma esponenziale $\Longrightarrow$ **Forma trigonometrica** $\Longrightarrow$ **Forma algebrica**

Esercizio 2

Soluzione 1

$$z = -3e^{i\frac{\pi}{2}} = -3\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = -3(0+i) = -3i$$

Soluzione 2

$$z = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1-i$$

Soluzione 3

$$z = -2e^{i\frac{\pi}{3}} = -2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3} = -2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1-\sqrt{3}i$$

Soluzione 4

$$z = 4e^{\left(-i\frac{\pi}{2}\right)} = 4\operatorname{cis}\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = 4(0-i) = -4i$$

Esercizio 3

> Calcolare
>
> - $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$
> - $\left(\sqrt{3}+i\right)^{-6}$

Soluzione

Posto $z=\sqrt{3}+i$ si ha

- $|z| = \sqrt{3+1} = 2$
- $z \in \mathrm{I}$ quadrante
- $\theta = \arg z = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \arctan \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{6}$
- $z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$

Esercizio 3

Da

$$z = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{6}$$

si ha

- $z^6 = 2^6\,\mathrm{cis}\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 2^6\,\mathrm{cis}\,\pi = -2^6 = -64$

- $z^{-6} = 2^{-6}\,\mathrm{cis}\left(-6\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 2^{-6}\,\mathrm{cis}\,-\pi = -2^{-6} = -\frac{1}{64}$

Poteva essere calcolata anche da $z^{-6} = \frac{\overline{z^6}}{|z^6|^2}$, oppure notando che era un numero reale

Esercizio 4

> Trovare le radici seste di 1 e rappresentarle graficamente

Soluzione

Si deve risolvere l'equazione

$$z^6 = 1$$

Esercizio 4

Dalla forma trigonometrica $z = 1 = \text{cis}\,(0)$ si ha

$$z_k \;=\; z^{1/6} \;=\; 1^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{6}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, 5$$

Le radici z_k sono numeri complessi di modulo 1 e argomenti multipli di $\frac{\pi}{3}$, i.e.

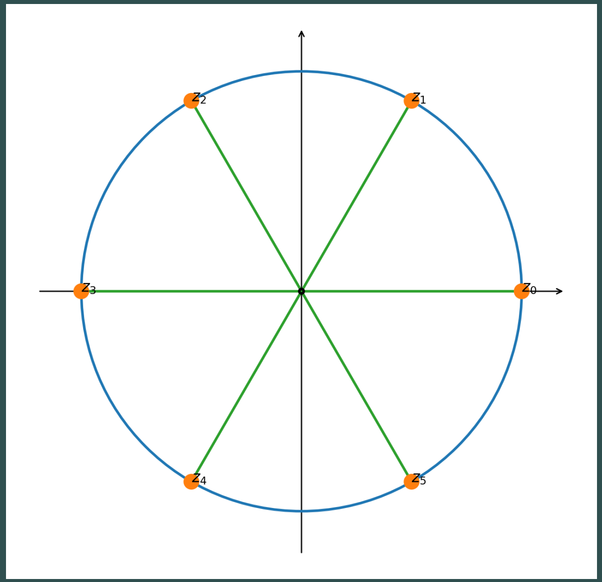
$$0, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \pi, \quad \frac{4\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{3}$$

Esercizio 4

$$z_k = \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{6}\right)$$

Per simmetria si ha

- $k = 0 \implies z_0 = 1$
- $k = 1 \implies z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $k = 2 \implies z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $k = 3 \implies z_3 = -z_0$
- $k = 1 \implies z_4 = -z_1$
- $k = 2 \implies z_5 = -z_2$



Esercizio 5

> Trovare le radici ottave di 1 e rappresentarle graficamente

Soluzione

Si deve risolvere l'equazione

$$z^8 = 1$$

Esercizio 5

Dalla forma trigonometrica $z = 1 = \text{cis}\,(0)$ si ha

$$z_k \;=\; z^{1/8} \;=\; 1^{\frac{1}{8}} \cdot \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{8}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, 7$$

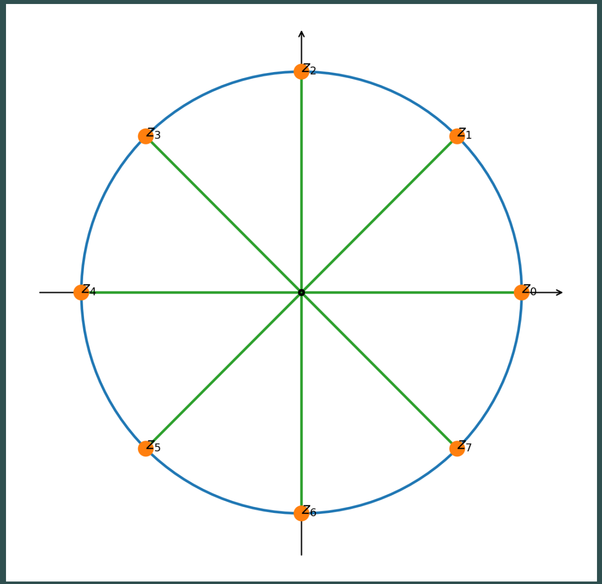
Le radici z_k sono numeri complessi di modulo 1 e argomenti multipli di $\frac{\pi}{4}$, i.e.

$$0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \ldots \quad , 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Esercizio 5

Per simmetria si ha

- $k = 0 \implies z_0 = 1$
- $k = 1 \implies z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$
- $k = 2 \implies z_2 = i$
- $k = 4 \implies z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$
- $k = 1 \implies z_4 = -z_0$
- $k = 2 \implies z_5 = -z_1$
- $k = 1 \implies z_6 = -z_2$
- $k = 2 \implies z_7 = -z_3$




FINE
Manolo Venturin