Rappresentazione esponenziale

(Definizione / Operazioni)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Forma esponenziale di un numero complesso
- Operazioni in forma esponenziale

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Forma esponenziale

Definizione

Dalla definizione di esponenziale complesso e^{a+bi} abbiamo la **forma esponenziale** di un numero complesso, i.e.

$$z = r \cdot e^{i\theta}$$

dove

- r è il **modulo**, infatti si ha $\left|r \cdot e^{i\theta}\right| = |r| \cdot \left|e^{i\theta}\right| = r \cdot |\cos\theta + i\sin\theta| = r \cdot 1 = r$
- θ è l'**argomento**

Importante: La forma esponenziale di un numero complesso si deriva dalla forma trigonometrica

Operazioni in forma esponenziale

Dalla proprietà dell'esponenziale complesso segue che

- Il complesso **coniugato** di $z = r \cdot e^{i\theta}$ è

$$\overline{z} = r \cdot e^{-i\theta}$$

- Il **prodotto** di $z_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$ è

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Il **quoziente** di $z_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$ è

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Operazioni in forma esponenziale

- Se $z = r \cdot e^{i\theta}$ allora la **formula di De Moivre** per $n \in \mathbb{N}$ diventa

$$z^n = r^n \cdot e^{in\theta}$$

- Se $z_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$ allora l'**argomento** ha le seguenti proprietà
  - $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
  - $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

dove bisogna fare attenzione alla periodicità $2\pi i$ quando si usano queste ultime due formule

Interpretazione geometrica della moltiplicazione / divisione

Se $z_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$ allora

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Quindi, moltiplicare il numero z_1 per z_2 significa:

- Applicare una dilatazione ($r_2 > 1$) / contrazione ($r_2 < 1$) di un fattore r_2
- Applicare una rotazione ($\theta_2 > 0$ in senso antiorario, $\theta_2 < 0$ in senso orario) di un angolo θ_2

Si ha un ragionamento simile per la divisione ma con il segno meno nell'argomento

Esempi

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Esempio 1

> Dato $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ e $z_2 = i$ calcolare, utilizzando la forma esponenziale, il prodotto $z_1 \cdot z_2$ e il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$

Soluzione

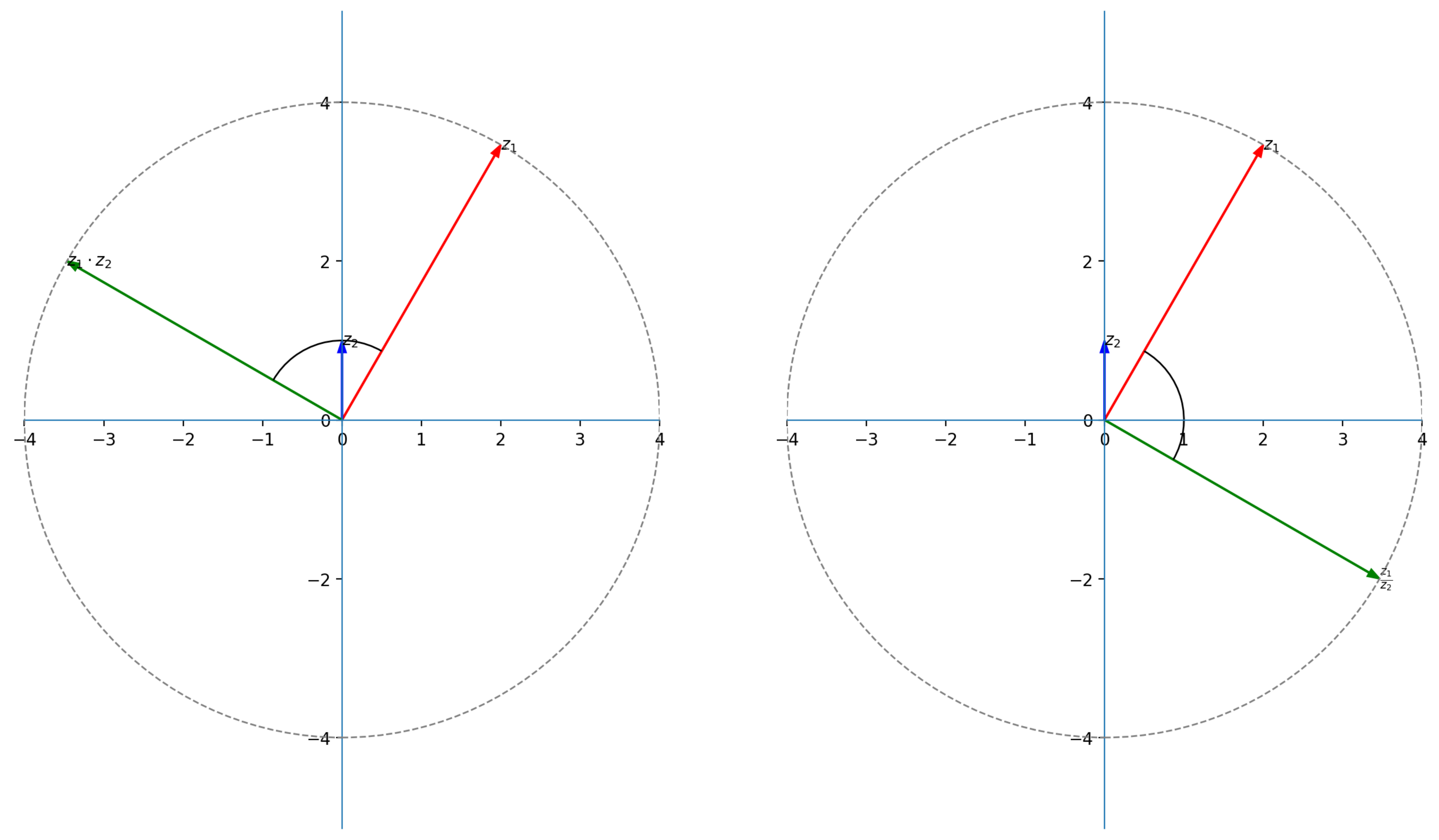
Dato

$$z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)} \quad , \quad z_2 = i = e^{\left(i\frac{\pi}{2}\right)}$$

si ha

- $z_1 \cdot z_2 = 4e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)} \cdot e^{\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = 4e^{\left(i\frac{5\pi}{6}\right)} = -2\sqrt{3} + 2i$ (rotazione di $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$)
- $\frac{z_1}{z_2} = 4e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)} \cdot e^{\left(-i\frac{\pi}{2}\right)} = 4e^{\left(-i\frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{3} - 2i$ (rotazione di $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$)

Esempio 1



Esempio 2

> Dato $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ e $z_2 = -i$ calcolare, utilizzando la forma esponenziale, il prodotto $z_1 \cdot z_2$ e il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$

Soluzione

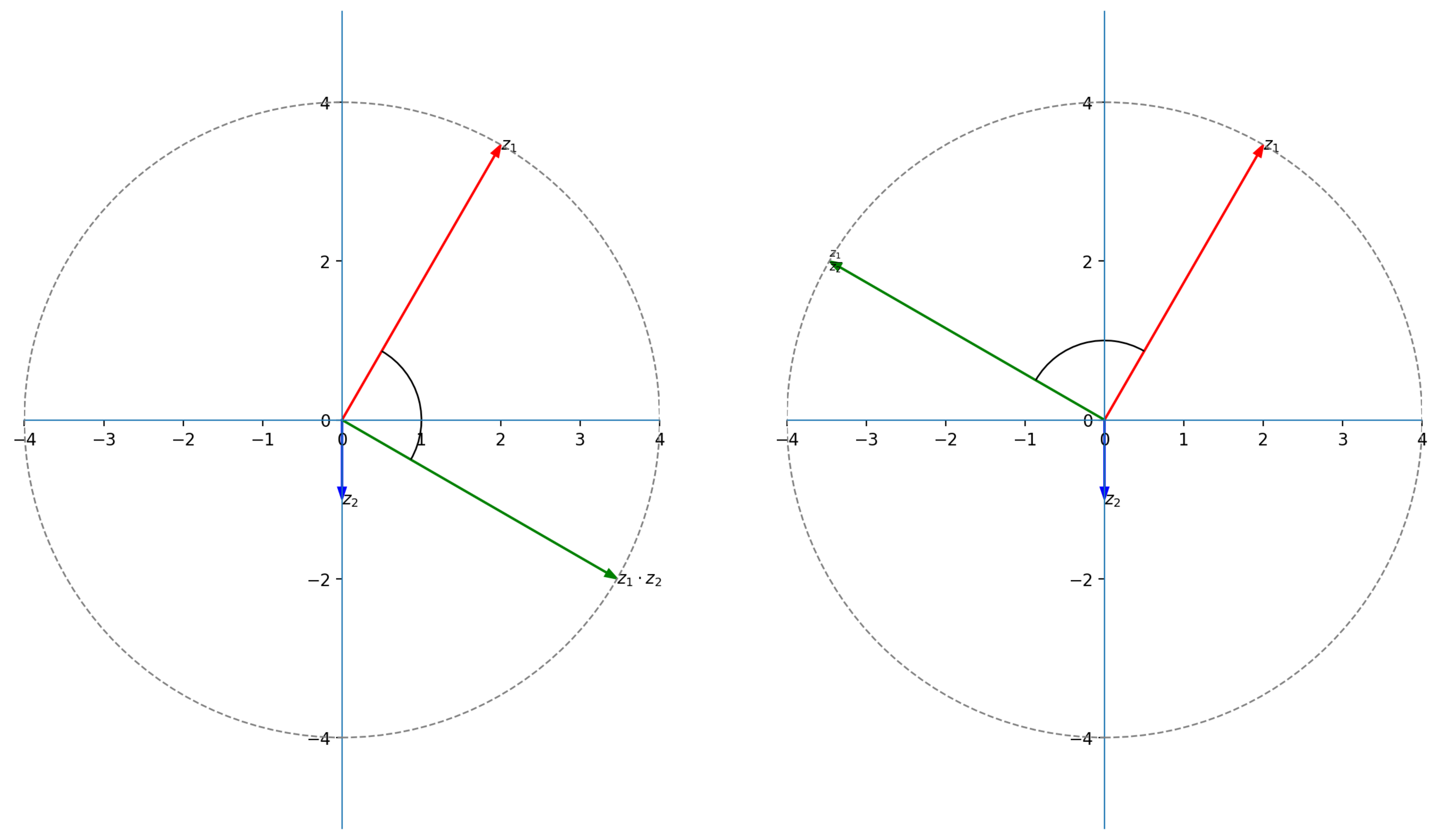
Dato

$$z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{\left(i\,\frac{\pi}{3}\right)} \quad , \quad z_2 = -i = e^{\left(-i\,\frac{\pi}{2}\right)}$$

si ha

- $z_1 \cdot z_2 = 4e^{\left(i\,\frac{\pi}{3}\right)} \cdot e^{\left(-i\,\frac{\pi}{2}\right)} = 4e^{\left(-i\,\frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{3} - 2i$ (rotazione di $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$)
- $\frac{z_1}{z_2} = 4e^{\left(i\,\frac{\pi}{3}\right)} \cdot e^{\left(i\,\frac{\pi}{2}\right)} = 4e^{\left(i\,\frac{5\pi}{6}\right)} = -2\sqrt{3} + 2i$ (rotazione di $\frac{\pi}{2} = +90^\circ$)

Esempio 2



Esempio 3

> Dato $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ e $z_2 = -1$ calcolare, utilizzando la forma esponenziale, il prodotto $z_1 \cdot z_2$ e il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$

Soluzione

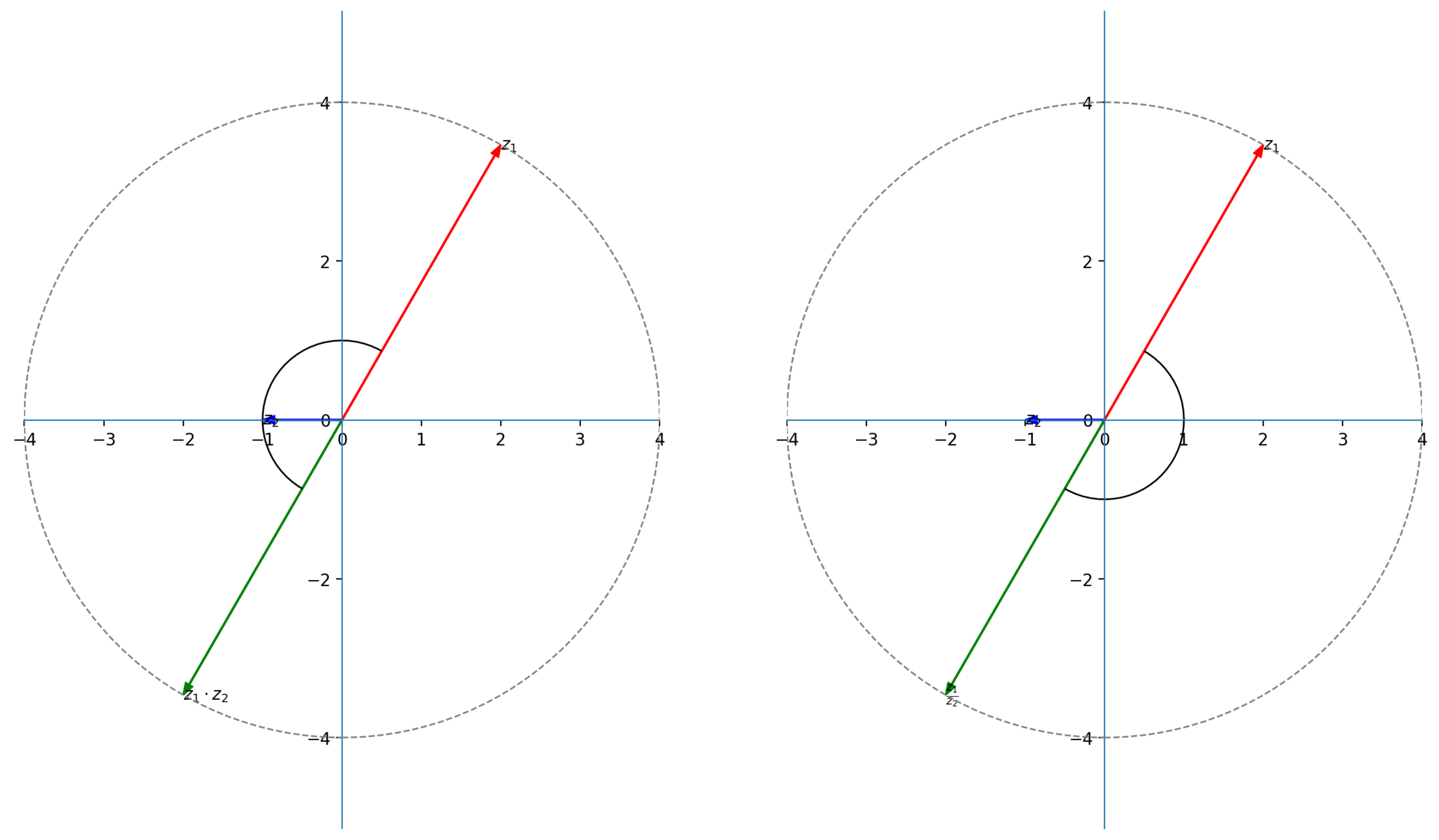
Dato

$$z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)} \quad , \quad z_2 = -1 = e^{(i\pi)}$$

si ha

- $z_1 \cdot z_2 = 4e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)} \cdot e^{(i\pi)} = 4e^{\left(-i\frac{4\pi}{3}\right)} = -2 - 2\sqrt{3}i$ (rotazione di $\pi = 180^\circ$)
- $\frac{z_1}{z_2} = 4e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)} \cdot e^{(-i\pi)} = 4e^{\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)} = -2 - 2\sqrt{3}i$ (rotazione di $-\pi = -180^\circ$)

Esempio 3



Esempio 4

> Dato $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ e $z_2 = 1 + i$ calcolare, utilizzando la forma esponenziale, il prodotto $z_1 \cdot z_2$ e il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$

Soluzione

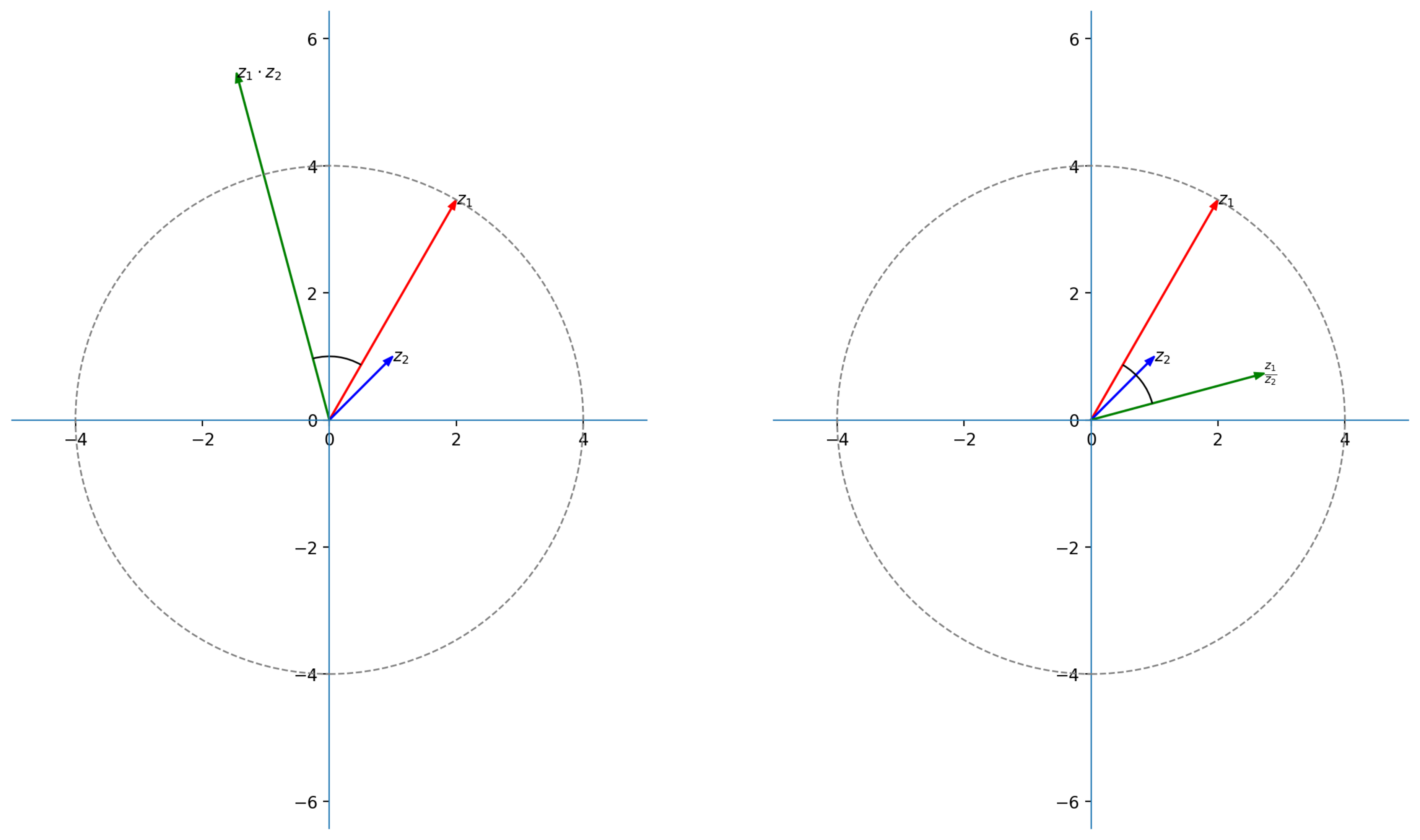
Dato

$$z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)} \quad , \quad z_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{\left(i\frac{\pi}{4}\right)}$$

si ha

- $z_1 \cdot z_2 = 4e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)} \cdot \sqrt{2}e^{\left(i\frac{\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}e^{\left(i\frac{7\pi}{12}\right)} = (2 - 2\sqrt{3}) + 2i\left(1 + \sqrt{3}\right)$
  (dilatazione di $\sqrt{2}$, rotazione di $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$)
- $\frac{z_1}{z_2} = 4e^{\left(i\frac{\pi}{3}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\left(-i\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}e^{\left(i\frac{\pi}{12}\right)} = (1 + \sqrt{3}) + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$
  (contrazione di $\sqrt{2}$, rotazione di $-\frac{\pi}{4} = -45^\circ$)

Esempio 4



Esempio 5

> Trovare gli $n \in \mathbb{N}$ tali che
>
> $$(1+\sqrt{3}i)^n$$
>
> è un numero reale negativo

Soluzione

Da $z = 1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, si ha che $z^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{3}}$ è un numero reale negativo se

$$e^{in\frac{\pi}{3}} = -1$$

Ricordando che, per la periodicità dell'esponenziale complesso $-1 = e^{i\pi + k2\pi i}$, allora si ha

$$e^{in\frac{\pi}{3}} = -1 = e^{i\pi + k2\pi i}$$

Esempio 5

$$e^{in\frac{\pi}{3}} = -1 = e^{i\pi + k2\pi i}$$

La soluzione si ottiene risolvendo l'uguaglianza, i.e.

$$n\frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \iff n = 3 + 6k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Le soluzioni richieste sono pertanto $n = 3 + 6k$ con $k \in \mathbb{N}$

Esempio 6

> Calcolare i^i

Soluzione

Da $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ si ha

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Nota: $e^{i\frac{\pi}{2}}$ non è la sola rappresentazione di i: infatti, dalla periodicità dell'esponenziale complesso si ha $i = e^{i\frac{\pi}{2}+k2\pi i}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Quindi, in realtà, la soluzione dipende da quale k si sceglie. La scelta $k = 0$, corrisponde a scegliere il ramo detto "naturale" del logaritmo complesso.

k	-1	0	1
$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}+k2\pi i}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}-k2\pi}$	$e^{\frac{3\pi}{2}}$	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	$e^{-\frac{5\pi}{2}}$


FINE
Manolo Venturin