# Le radici n-esime

*(Calcolo / Significato / Radici dell'unità)*

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

# Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Radici $n$-esime di un numero complesso
- Significato geometrico delle radici complesse
- Radici $n$-esime dell'unità

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

# Radici $n$-esime di un numero complesso

### Definizione

> Sia $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$. In analogia con il caso reale, un numero $w \in \mathbb{C}$ è una radice $n$-esima di $z$ se
>
> $$w^n = z$$
>
> Se $z = 0$ si ha una sola radice: $w = 0$

# Teorema fondamentale

> Sia $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$. Se $z \neq 0$, allora $z$ ammette esattamente $n$ radici distinte e, da $z = r\,\mathrm{cis}(\theta)$, sono della forma
>
> $$z_k = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta + k2\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$
>
> dove due radici consecutive $z_k$ e $z_{k+1}$ differiscono di $\frac{2\pi}{n}$

**Nota:**

- $\sqrt{z}$ ha due radici che sono opposte tra loro

# Teorema fondamentale

## Dimostrazione

Ricordiamo la formula di De Moivre: se $z = r\,\text{cis}(\theta)$ allora $z^n = r^n\,\text{cis}\,(n\theta)$

Utilizzando De Moivre, le radici sono

$$z_k = r^{\frac{1}{n}}\,\text{cis}\left(\frac{\theta + k2\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

in quanto soddisfano la relazione $z_k^n = z$

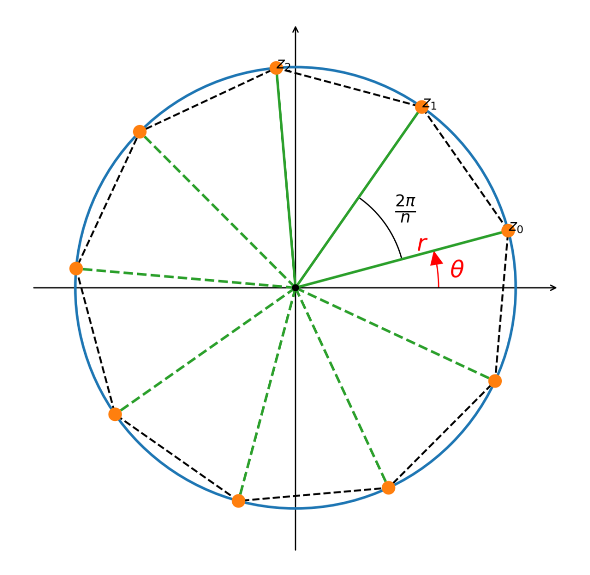
Per dimostrare che le radici sono esattamente $n$, basta osservare che $z_{k+n} = z_k$, infatti

$$z_{k+n} = r^{\frac{1}{n}}\,\text{cis}\left(\frac{\theta + (k+n)2\pi}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}}\,\text{cis}\left(\frac{\theta + k2\pi}{n} + \frac{\cancel{n}\,2\pi}{\cancel{n}}\right) = r^{\frac{1}{n}}\,\text{cis}\left(\frac{\theta + k2\pi}{n}\right) = z_k$$

# Significato geometrico delle radici complesse

Le radici n-esime rappresentano gli $n$ **vertici di un poligono regolare**

- con posizione iniziale $\theta = \arg z$
- raggio $r = |z|$
- cerchio
  $|z| = r \implies \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = r^2$



# Radici $n$-esime dell'unità

Le soluzioni di

$$z^n = 1$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$ sono dette radici $n$-esime dell'unità e sono date da $(\theta = 0)$

$$z_k = \operatorname{cis}\left(k\frac{2\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Se $\omega = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ allora le $n$ radici sono

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \ldots, \omega^{n-1},$$

Per passare alla successiva radica si moltiplica per $\omega$ ovvero si somma $\frac{2\pi}{n}$ all'angolo $\theta$ della precedente

# Esempi

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

# Esempio 1

> Trovare le radici cubiche di $1$

**Soluzione**

Si deve risolvere l'equazione

$$z^3 = 1$$

Forma trigonometrica di $z = 1$:

- $r = |z| = 1$
- $z \in \mathrm{I}$ quadrante
- $\theta = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = \arctan 0 = 0 = 0^\circ$
- $z = 1 \cdot \operatorname{cis}(0)$

# Esempio 1

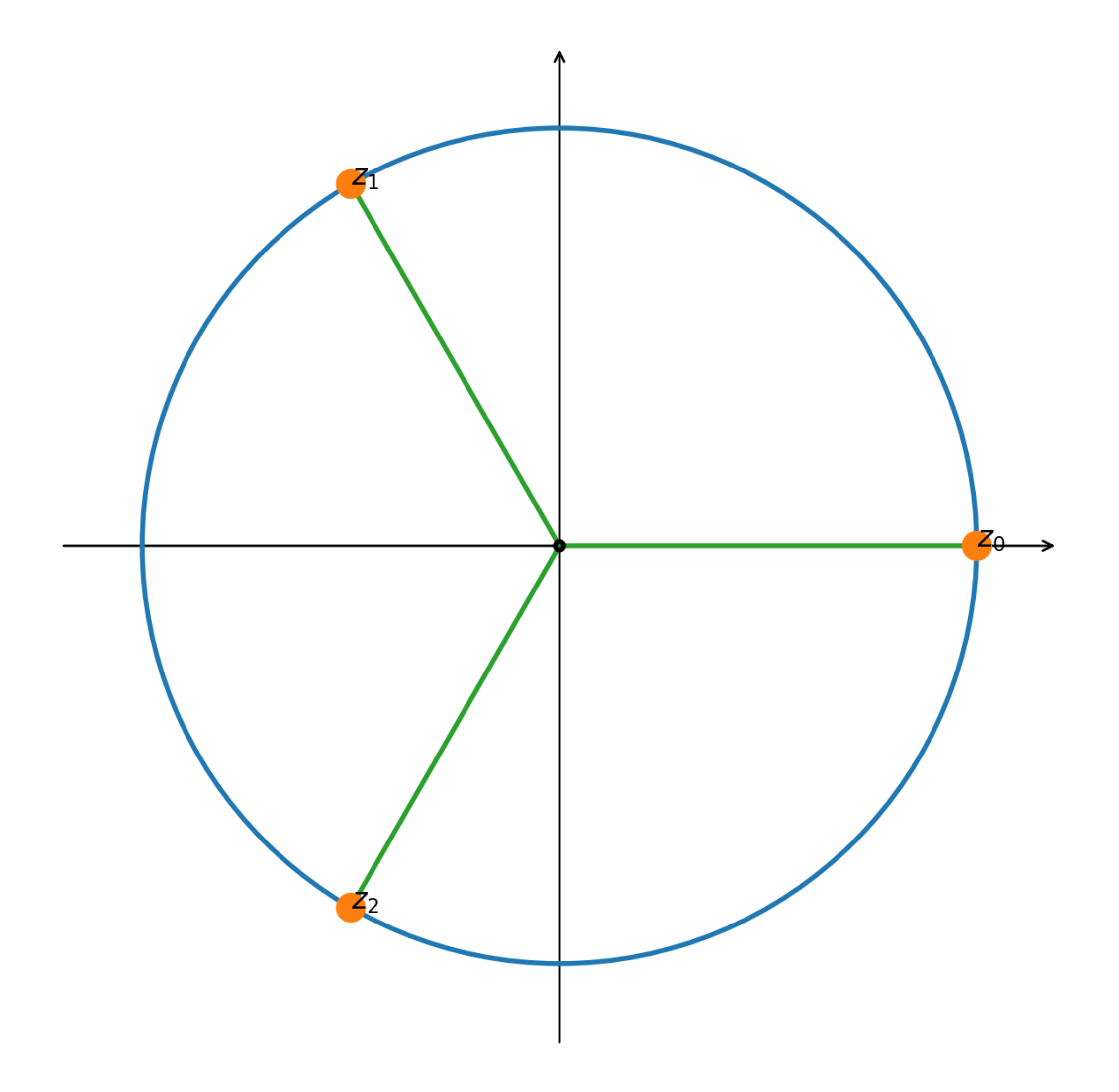
Si ha

$$z_k = z^{1/3} = 1^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2$$

da cui

- $k = 0 \implies z_0 = 1$
- $k = 1 \implies z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $k = 2 \implies z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

# Esempio 1




Radici cubiche dell'unità

# Esempio 1

## Soluzione alternativa

Dalla fattorizzazione

$$z^3 = 1 \implies (z-1)(z^2+z+1) = 0$$

si ha

- $z - 1 = 0 \implies z_0 = 1$
- $z^2 + z + 1 = 0 \implies z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

# Esempio 2

> Trovare le radici quarte del numero complesso $z = 8(-1+\sqrt{3}i)$

**Soluzione**

Forma trigonometrica di $z = 8(-1+\sqrt{3}i)$:

- $r \;=\; |z| \;=\; 8\sqrt{1+3} \;=\; 16$
- $z \in \text{II quadrante}$
- $\theta \;=\; \arctan\left(-\sqrt{3}\right) \;=\; \frac{2}{3}\pi = 120^\circ$
- $z \;=\; 16 \cdot \text{cis}\left(\frac{2}{3}\pi\right)$

# Esempio 2

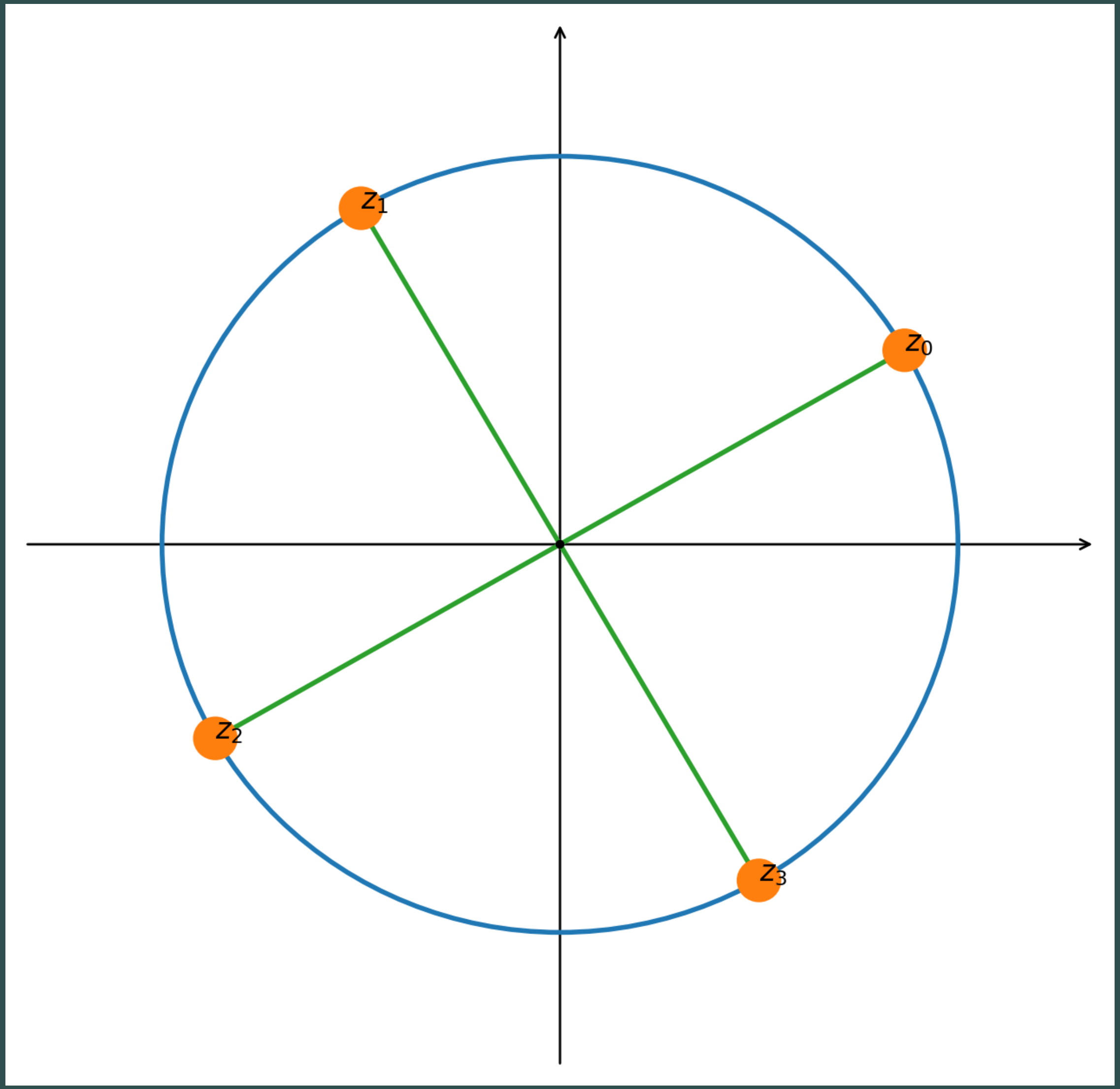
Si ha

$$z_k \;=\; z^{1/4} \;=\; 16^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\frac{2}{3}\pi + k2\pi}{4}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

da cui

- $k = 0 \quad\Longrightarrow\quad z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sin\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$
- $k = 1 \quad\Longrightarrow\quad z_1 = -1 + i\sqrt{3}$
- $k = 2 \quad\Longrightarrow\quad z_2 = -z_0$
- $k = 3 \quad\Longrightarrow\quad z_3 = -z_1$

# Esempio 2




FINE
Manolo Venturin