Teorema di De Moivre

(Potenze con esponente ‘piccolo’ / Formula di De Moivre)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Potenze con esponente di elevazione “piccolo”
- Formula di De Moivre

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Potenze con esponente “piccolo”

Potenza positiva (binomio di Newton)

Se

$$z = a + bi$$

allora

$$z^n$$

con $n \in \mathbb{N}$ si può calcolare con il binomio di Newton e poi semplificare

Ad esempio

$$\begin{aligned}
(a+bi)^2 &= a^2 + 2abi - b^2 = (a^2 - b^2) + 2abi \\
(a+bi)^3 &= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

Questo approccio è agevole soltanto se n è piccolo

Potenze con esponente “piccolo”

Potenza negativa

Se

$$z = a + bi$$

allora

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

con $n \in \mathbb{N}$ si calcola attraverso la formula

$$z^{-n} \ = \ (z^n)^{-1}$$

- Si calcola prima la potenza di z^n e poi si esegue l’inverso
- Ricordiamo che l’inverso di z è $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Esempio

> Dato $z = 1 + i$ calcolare
>
> $$z^3 \quad \text{e} \quad z^{-3}$$

Soluzione

Si ha

- $z = 1 + i$
- $z^3 = (1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$
- $z^{-3} = \frac{\overline{z^3}}{|z^3|^2} = \frac{-2-2i}{4+4} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

Potenze con esponente “grande”

Formula di De Moivre

Se $z = r\,\mathrm{cis}(\theta)$ allora

$$z^n = r^n\,\mathrm{cis}\,(n\theta)$$

con $n \in \mathbb{Z}$

Questa formula è utile per n grande (positivo o negativo)

Per il calcolo richiede il numero espresso in forma trigonometrica

Potenze con esponente “grande”

Dimostrazione (per induzione)

Caso: $n = 0$

Se $z = r\operatorname{cis}(\theta)$ allora

$$z^0 = r^0 \operatorname{cis}(0 \cdot \theta) = 1 \cdot \operatorname{cis} 0 = 1$$

Potenze con esponente “grande”

Caso: $n > 1$

- Ipotesi induttiva: $z^{n-1} = r^{n-1} \cdot \text{cis}\left((n-1)\theta\right)$
- Dimostrare che $z^n = r^n \text{ cis}\left(n\theta\right)$

Si ha

$$\begin{aligned} z^n &= z^{n-1} \cdot z \\ &= r^{n-1} \cdot \text{cis}\left((n-1)\theta\right) \cdot r \cdot \text{cis}\,\theta \\ &\text{(prodotto forma trig.)} \\ &= r^{n-1} \cdot r \cdot \text{cis}\left((n-1)\theta + \theta\right) \\ &= r^n \text{ cis}\left(n\theta\right) \end{aligned}$$

Potenze con esponente “grande”

Caso: $n < -1$

Ricordiamo che

- $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
- $z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$

Quindi si ha

$$
\begin{aligned}
z^{-n} &= \frac{\overline{z^n}}{|z^n|^2} = \frac{\overline{r^n \operatorname{cis}(n\theta)}}{|r^n \operatorname{cis}(n\theta)|^2} \\
&= \frac{r^n \operatorname{cis}(-n\theta)}{\left(|r^n| \cdot |\operatorname{cis} n\theta|\right)^2} = \frac{r^n \operatorname{cis}(-n\theta)}{|r^n|^2} = r^{-n} \operatorname{cis}(-n\theta)
\end{aligned}
$$

Esempi

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Esempio 1

> Dato $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$ calcolare
>
> $$z^{10}$$

Soluzione

La rappresentazione trigonometrica di $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$ è

- $|z| \; = \; \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \; = \; \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \; = \; 1$
- $z \in \mathrm{IV}$ $\;\mathrm{quadrante}$ e $\theta \; = \; \arctan\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \; = \; \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \; = \; -\frac{\pi}{6} \; = \; -30^\circ$
- $z \; = \; 1 \cdot \mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \; = \; \mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Esempio 1

Per il calcolo della potenza, ricordiamo che $\arg z^{10} \in (-\pi, \pi]$, quindi si ha

$$z^{10} = 1^{10} \cdot \operatorname{cis}\left(-10\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{5}{3}\pi\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{5}{3}\pi + 2\pi\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

In forma algebrica:

$$z^{10} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Esempio 2

> Dato $z = 1 + i$ calcolare
>
> $$z^{-12}$$

Soluzione

Da $z = 1 + i$ si ha

- $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $z \in \mathrm{I}\ \text{quadrante}$
- $\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$
- $z = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- $z^{-12} = (\sqrt{2})^{-12} \cdot \text{cis}\left(-\frac{12}{4}\pi\right) = \frac{1}{2^6} \cdot \text{cis}\,(-3\pi) = \frac{1}{64} \cdot \text{cis}\,\pi = -\frac{1}{64}$

Esempio 3

> Trovare la parte reale ed immaginaria del numero complesso
>
> $$z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{16}$$

Soluzione

Sia $w = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i}{4}$ allora

- $|w| = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}}{4} = \frac{\sqrt{3+1-\cancel{2}\sqrt{3}+3+1+\cancel{2}\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $w \in \mathrm{I}$ quadrante e $\arg w = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = \frac{5\pi}{12}$
- $w = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Esempio 3

Da $w = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ si ha

$$z = w^{16} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right]^{16} = \frac{1}{2^8} \operatorname{cis}\left(16 \cdot \frac{5}{12}\pi\right) = \frac{1}{2^8} \operatorname{cis}\left(\frac{20}{3}\pi\right)$$

Quindi

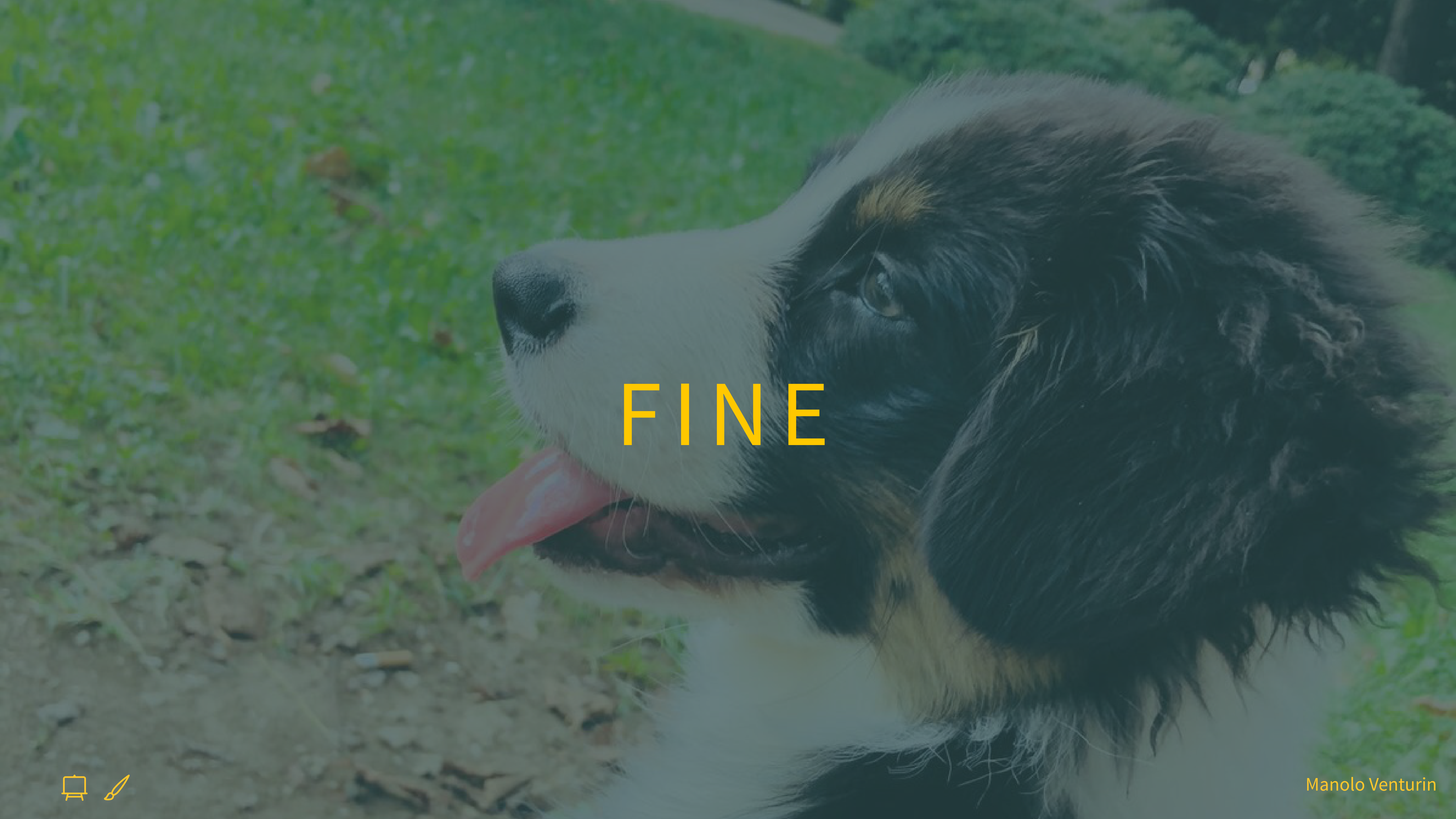
$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2^8} \cos\left(\frac{20}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2^9}$$

e

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2^8} \sin\left(\frac{20}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2^9}$$

La soluzione segue da

$$\cos\left(\frac{20}{3}\pi\right) = \cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$$



FINE