Rappresentazione trigonometrica

(Dalla forma trigonometrica alla forma algebrica / Coniugato / Prodotto e quoziente)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso
- Calcolo dell'argomento / anomalia
- Dalla forma trigonometrica alla forma algebrica
- Coniugato
- Prodotto di due numeri in forma trigonometrica
- Quoziente di due numeri

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Rappresentazione trigonometrica

Definizione

Dato il numero complesso $z = a + bi$, la sua **rappresentazione trigonometrica** è

$$z = r \cdot \mathrm{cis}(\theta) = r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

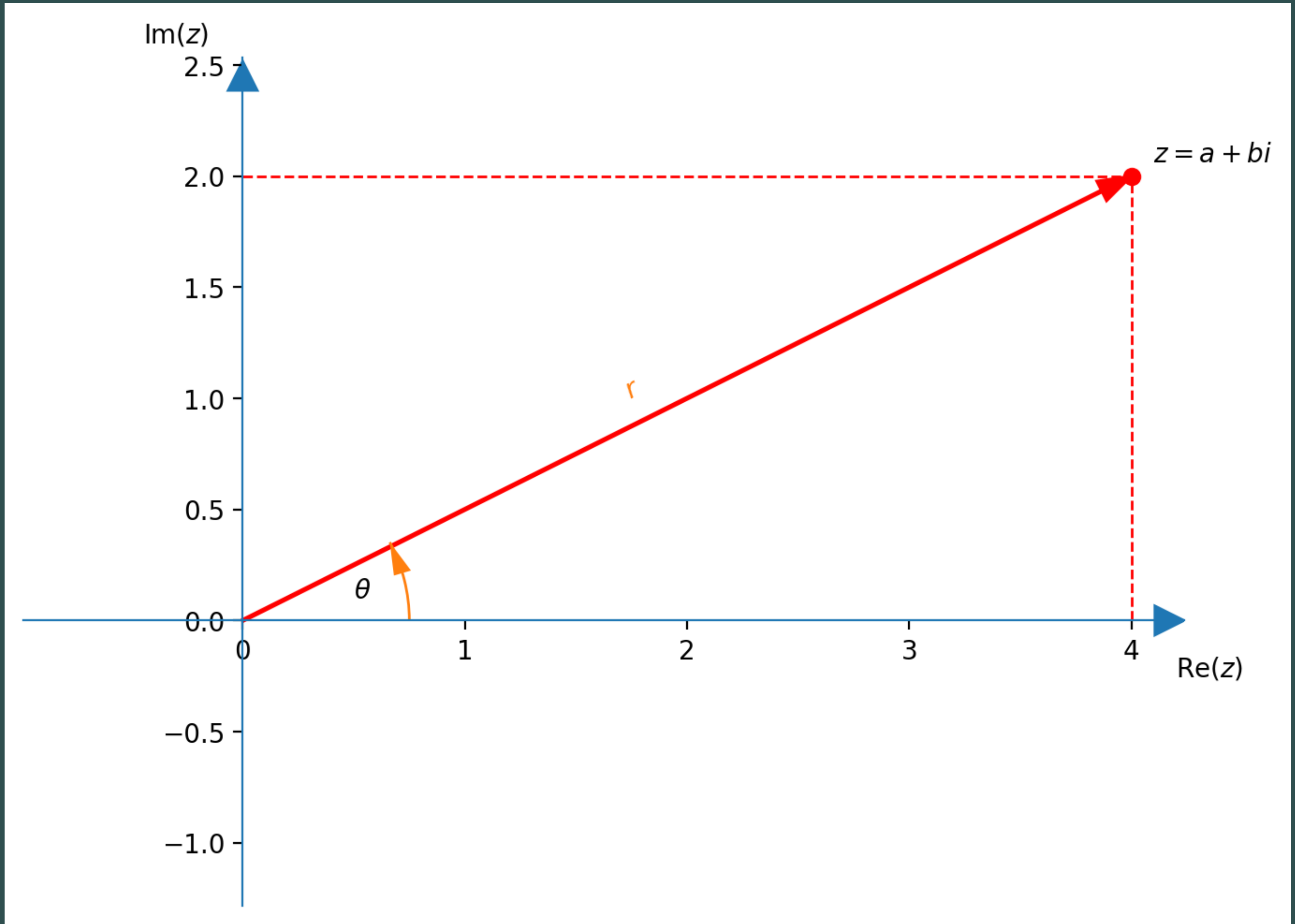
dove:

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, con $r \geq 0$, è detto **modulo** o valore assoluto e rappresenta la lunghezza del vettore z
- $\theta = \arg z \in (-\pi, \pi]$ è detto **argomento** o anomalia e rappresenta l'angolo rispetto al semiasse di riferimento del vettore z

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Rappresentazione trigonometrica

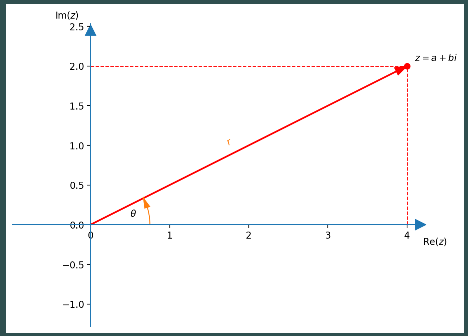
L'interpretazione grafica è riportata in figura



Rappresentazione trigonometrica

Alcune osservazioni:

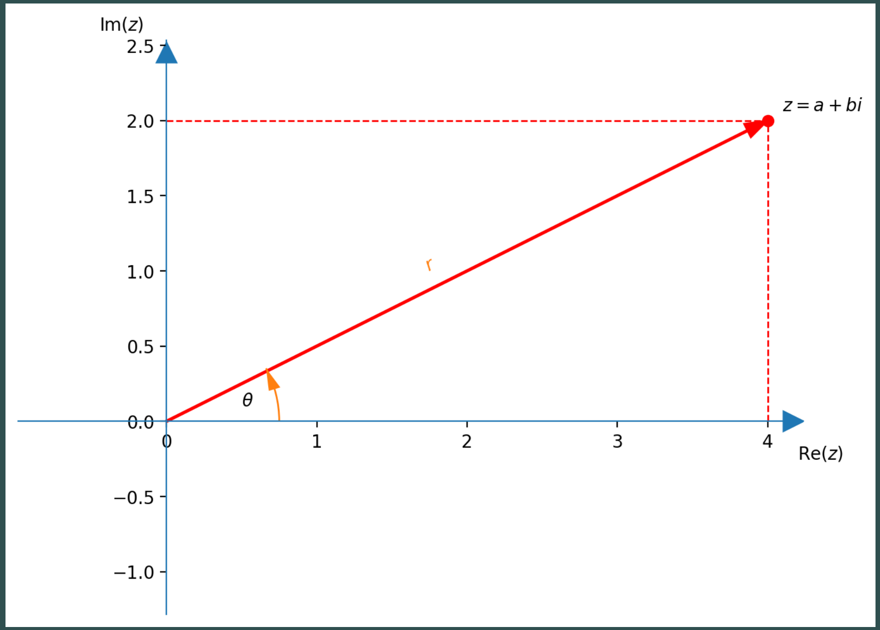
- $-\pi < \theta \leqslant \pi$ è detto **intervallo principale**
- Altre scelte sono possibili come $0 \leqslant \theta < 2\pi$
- Nell'esecuzione delle operazioni (es. prodotto, quoziente), l'angolo va sempre riportato nel suo intervallo di definizione
- L'obiettivo è di rendere biunivoca la corrispondenza tra forma trigonometrica e forma algebrica
- Per $z = 0$ si definisce $r = 0$ e $\theta = \text{non definito}$ (così la trasformazione è biunivoca)



Calcolo dell'argomento / anomalia

Dato il numero complesso $z = a + bi$, se $\theta = \arg z \in (-\pi, +\pi]$, si ha

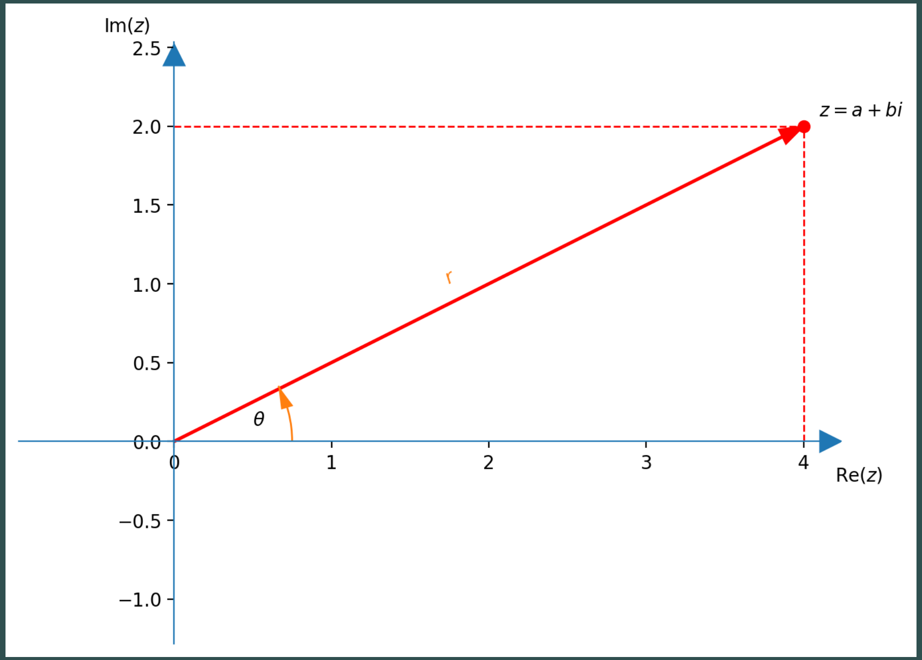
$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{se } a = 0,\ b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{se } a = 0,\ b < 0 \\ \text{non definito} & \text{se } a = 0,\ b = 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{se } a > 0,\ b \text{ qualsiasi} \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi & \text{se } a < 0,\ b \geq 0 \\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) - \pi & \text{se } a < 0,\ b < 0 \end{cases}$$



Dalla forma trigonometrica alla forma algebrica

Se $z = \text{cis}(\theta)$, allora $z = a + bi$ si ottiene come

$$\begin{cases} a = r \cdot \cos\theta \\ b = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$



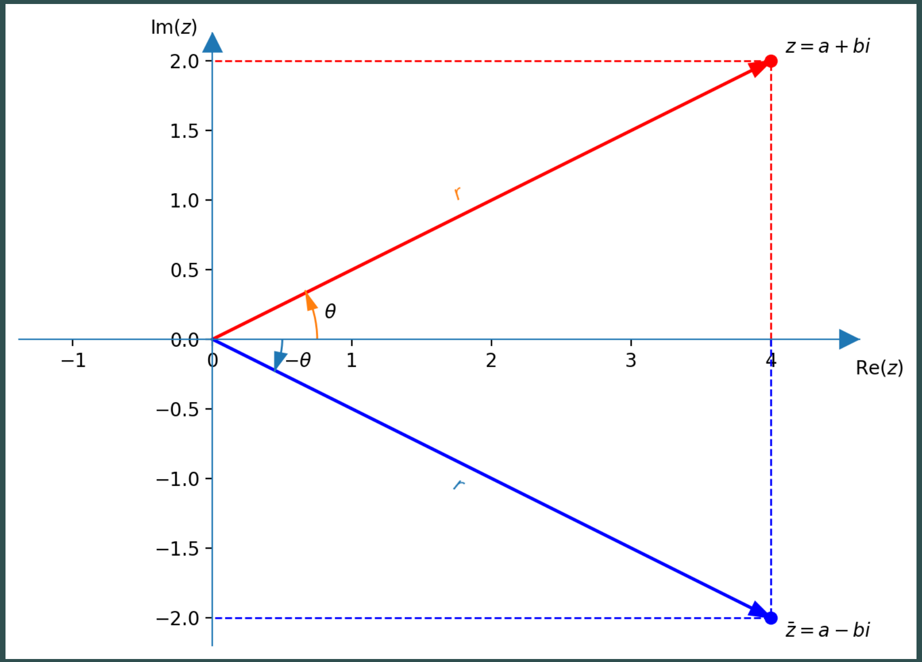
Coniugato

Dalla relazione

$$z = r\,\mathrm{cis}(-\theta) = r\,(\cos\theta - i\sin\theta)$$

si ha che il complesso coniugato di $z = \mathrm{cis}(\theta)$ è

$$\bar{z} = r\,(\cos\theta - i\sin\theta) \;=\; r\,\mathrm{cis}(-\theta)$$



Prodotto di due numeri in forma trigonometrica

Se $z_1 = r_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$ e $z_2 = r_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$, allora il loro prodotto è

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

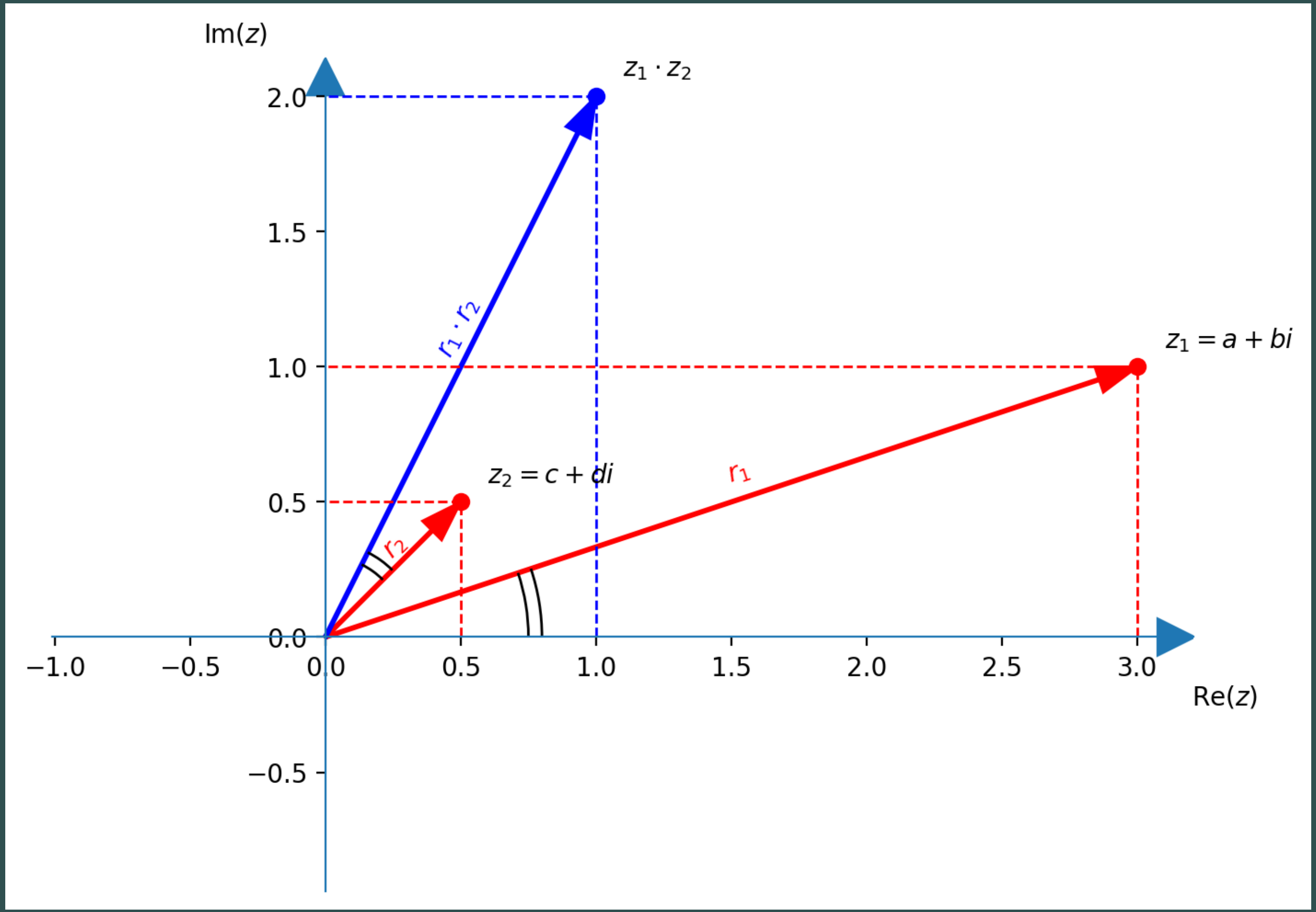
Si ottiene come prodotto dei moduli e somma degli angoli dei due numeri

Dimostrazione

Si ha

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [r_1 \operatorname{cis}(\theta_1)] \cdot [r_2 \operatorname{cis}(\theta_2)] \\ &= r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) \right. \\ &\quad \left. + i\,(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2) \right] \\ &= r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Prodotto di due numeri in forma trigonometrica



Quoziente di due numeri

Se $z_1 = r_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$ e $z_2 = r_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$, allora il loro quoziente è

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

Si ottiene come divisione dei moduli e differenza degli angoli dei due numeri

Dimostrazione

Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 \operatorname{cis}(\theta_1)}{r_2 \operatorname{cis}(\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i\,(\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\
&= \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}$$

Esempi

Esempio 1

> Dato il numero complesso $z = \sqrt{3} - i$
>
> - Scrivere la relativa forma trigonometrica
> - Calcolare il coniugato
> - Rappresentare i risultati graficamente

Soluzione

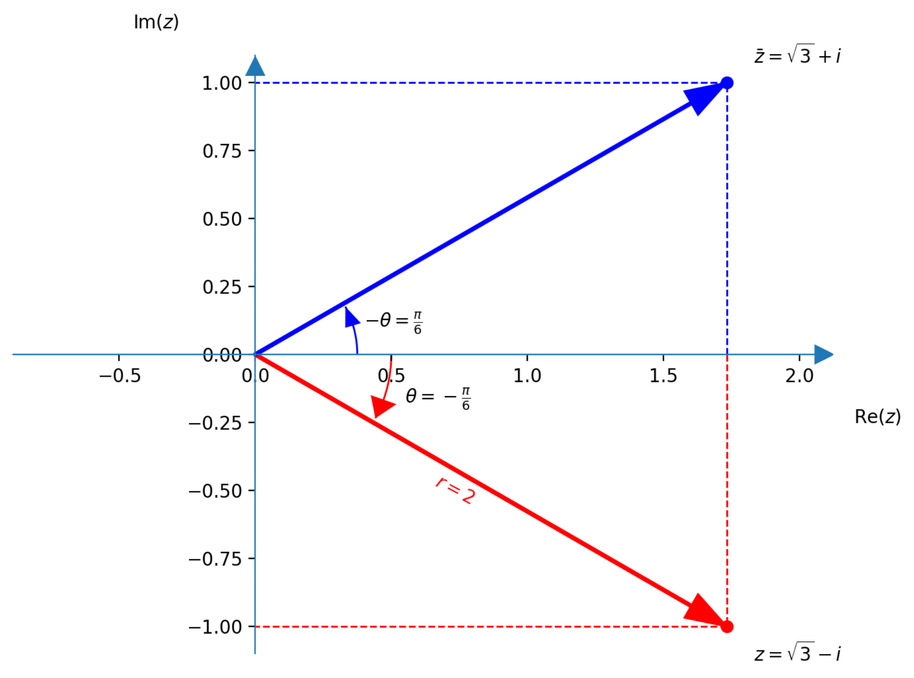
Da $z = \sqrt{3} - i$ si ha

- $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- $z \in \mathrm{IV}$ quadrante e $\theta = \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} = -30^\circ$
- $z = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
- $\bar{z} = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Esempio 1

Eseguiamo la verifica

- $z = 2\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$
- $\overline{z} = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$



Esempio 2

> Dati i numeri complessi $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = -\sqrt{3} + i$, calcolare
>
> - $z_1 \cdot z_2$ e il relativo numero in forma algebrica
> - $\frac{z_1}{z_2}$ e il relativo numero in forma algebrica
> - rappresentare i risultati graficamente

Soluzione

La rappresentazione trigonometrica di $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ è

- $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$
- $z \in \text{I quadrante}$
- $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$
- $z_1 = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Esempio 2

La rappresentazione trigonometrica di $z_2 = -\sqrt{3} + i$ è

- $|z_2| = \sqrt{3+1} = 2$
- $z \in \text{II quadrante}$
- $\theta = \arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi = 150^\circ$
- $z_2 = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$

Esempio 2

Il prodotto di $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = -\sqrt{3} + i$ è

- $z_1 = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- $z_2 = 2\,\text{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$
- $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi\right) = 4\,\text{cis}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = 4\,\text{cis}\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ (riportato in $(-\pi, \pi])$
- $z_1 \cdot z_2 = 4\,\text{cis}\,(-150^\circ)$
- In forma algebrica: $z_1 \cdot z_2 = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -2\sqrt{3} - 2i$
- verifica: $z_1 \cdot z_2 = (1 + \sqrt{3}i) \cdot (-\sqrt{3} + i) = -\sqrt{3} - \sqrt{3} + i - 3i = -2\sqrt{3} - 2i$

Esempio 2

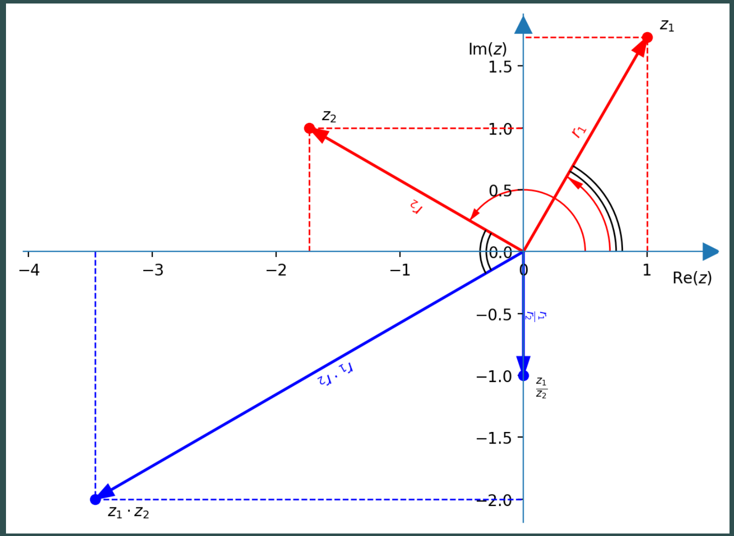
Il prodotto di $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = -\sqrt{3} + i$ è

- $z_1 = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- $z_2 = 2\,\text{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5}{6}\pi\right) = 1\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5}{6}\pi\right) = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \text{cis}\left(-90^\circ\right)$
- In forma algebrica: $\frac{z_1}{z_2} = 0 - i = -i$
- verifica: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}+i} \cdot \frac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)\cdot(-\sqrt{3}-i)}{3+1} = \frac{-\cancel{\sqrt{3}} - i - 3i + \cancel{\sqrt{3}}}{4} = \frac{-\cancel{4}\,i}{\cancel{4}} = -i$

Esempio 2

Per la rappresentazione grafica scriviamo i numeri in forma algebrica cioè

- $z_1 = 1 + \sqrt{3}i \; = \; 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- $z_2 = -\sqrt{3} + i \; = \; 2\,\text{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$
- $z_1 \cdot z_2 \; = \; -2\sqrt{3} - 2i \; = \; 4\,\text{cis}\left(-\frac{5}{6}\pi\right) \; = \; 4\,\text{cis}\left(-150^\circ\right)$
- $\frac{z_1}{z_2} \; = \; -i \; = \; \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \; = \; \text{cis}\left(-90^\circ\right)$




FINE
Manolo Venturin