Esercizi parte I (B)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Indice degli esercizi (corso Analisi Matematica 1)

1. Scrivere in forma cartesiana il seguente numero complesso $z = \sqrt{2}\left(\frac{2-2i}{|1-i|}\right) - i$
2. Trovare z tale che $(1-i)z + 2\bar{z} = 2i$
3. Se $|z| = 1$ allora dimostrare che
   - $(z-1)(\bar{z}+1)$ è un numero immaginario puro
   - $(z^2+1)\bar{z}$ è un numero reale puro
4. Calcolare i^{35^3}
5. Dimostrare che l'area del triangolo di vertici $0, z, w$ è $\frac{1}{2}\,|\mathrm{Im}(\bar{z}w)|$

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Soluzione

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Esercizio 1

> Scrivere in forma cartesiana il seguente numero
>
> $$z = \sqrt{2}\left(\frac{2-2i}{|1-i|}\right) - i$$

Soluzione

Si ha

$$\begin{aligned} z = \sqrt{2}\left(\frac{2-2i}{|1-i|}\right) - i \;&=\; 2\sqrt{2}\frac{1-i}{\sqrt{1+1}} - i \\ = 2\cancel{\sqrt{2}}\,\frac{1-i}{\cancel{\sqrt{2}}} - i \;&=\; 2(1-i) - i \\ = 2 - 3i \end{aligned}$$

Esercizio 2

> Trovare z tale che
>
> $$(1-i)z + 2\bar{z} = 2i$$

Soluzione

Posto $z = a + bi$, e sviluppando l'equazione, si ha

$$\begin{aligned}
(1-i)z + 2\bar{z} &= 2i \\
(1-i)(a+bi) + 2\overline{(a+bi)} &= 2i \\
(1-i)(a+bi) + 2(a-bi) &= 2i \\
a + bi - ai + b + 2a - 2bi &= 2i \\
(a + b + 2a) + (b - a - 2b)i &= 2i
\end{aligned}$$

Esercizio 2

$$(a+b+2a)+(b-a-2b)i=2i$$

Uguagliando parte reale e immaginaria si ottiene

$$\begin{cases} b+3a=0 \\ -b-a=2 \end{cases} \implies \begin{cases} b=-3a \\ +3a-a=2 \end{cases} \implies \begin{cases} b=-3 \\ a=1 \end{cases} \implies z=1-3i$$

Esercizio 3

> Se $|z| = 1$ allora dimostrare che
>
> - $(z-1)(\overline{z}+1)$ è un numero immaginario puro
> - $(z^2+1)\overline{z}$ è un numero reale puro

Soluzione

Se $|z| = 1$ allora la prima espressione diventa

$$(z-1)(\overline{z}+1) = z\overline{z} + z - \overline{z} - 1 = \cancel{1} + z - \overline{z} - \cancel{1} = 2\,\mathrm{Im}(z)i$$

Essendo $\mathrm{Im}(z)$ un numero reale, allora $2\,\mathrm{Im}(z)i$ è immaginario puro

Esercizio 3

Se $|z| = 1$ allora la seconda espressione diventa

$$(z^2+1)\overline{z} = z \cdot \overbrace{\cancel{(z\overline{z})}}^{1} + \overline{z} = z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

Essendo $\mathrm{Re}(z)$ un numero reale, allora $2\,\mathrm{Re}(z)$ è reale puro

Esercizio 4

> Calcolare
>
> $$i^{35^3}$$

Soluzione

Osserviamo che

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = i \cdot i = -1, \quad i^3 = -1 \cdot i = -i,$$
$$i^4 = -i \cdot i = 1, \quad i^5 = 1 \cdot i = i, \quad \dots$$

da cui

$$i^{4n} = 1 \quad , \quad i^{4n+1} = i \quad , \quad i^{4n+2} = -1 \quad , \quad i^{4n+3} = -i \qquad n \in \mathbb{N}$$

Esercizio 4

$$i^{4n} = 1 \quad , \quad i^{4n+1} = i \quad , \quad i^{4n+2} = -1 \quad , \quad i^{4n+3} = -i \qquad n \in \mathbb{N}$$

Indichiamo con $k = 35^3$, da cui

$$\begin{aligned} k = 35^3 &= (32+3)^3 = 32^3 + 3 \cdot 32^2 \cdot 3 + 3 \cdot 32 \cdot 3^2 + 3^3 \\ &= 4m + 27 = 4m + 24 + 3 = 4n + 3 \quad \text{per un certo} \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Quindi, si ha

$$i^{35^3} = i^{4n+3} = -i$$

Esercizio 5

> Dimostrare che l'area del triangolo di vertici 0, z, w è
>
> $$\frac{1}{2}\left|\operatorname{Im}(\overline{z}w)\right|$$

Soluzione

I punti $O=(0,0)$, $z=(x_z, y_z)$ e $w=(x_w, y_w)$ rappresentano i vertici di un triangolo, la cui area $\frac{1}{2}\left|\operatorname{Im}(\overline{z}w)\right|$ è

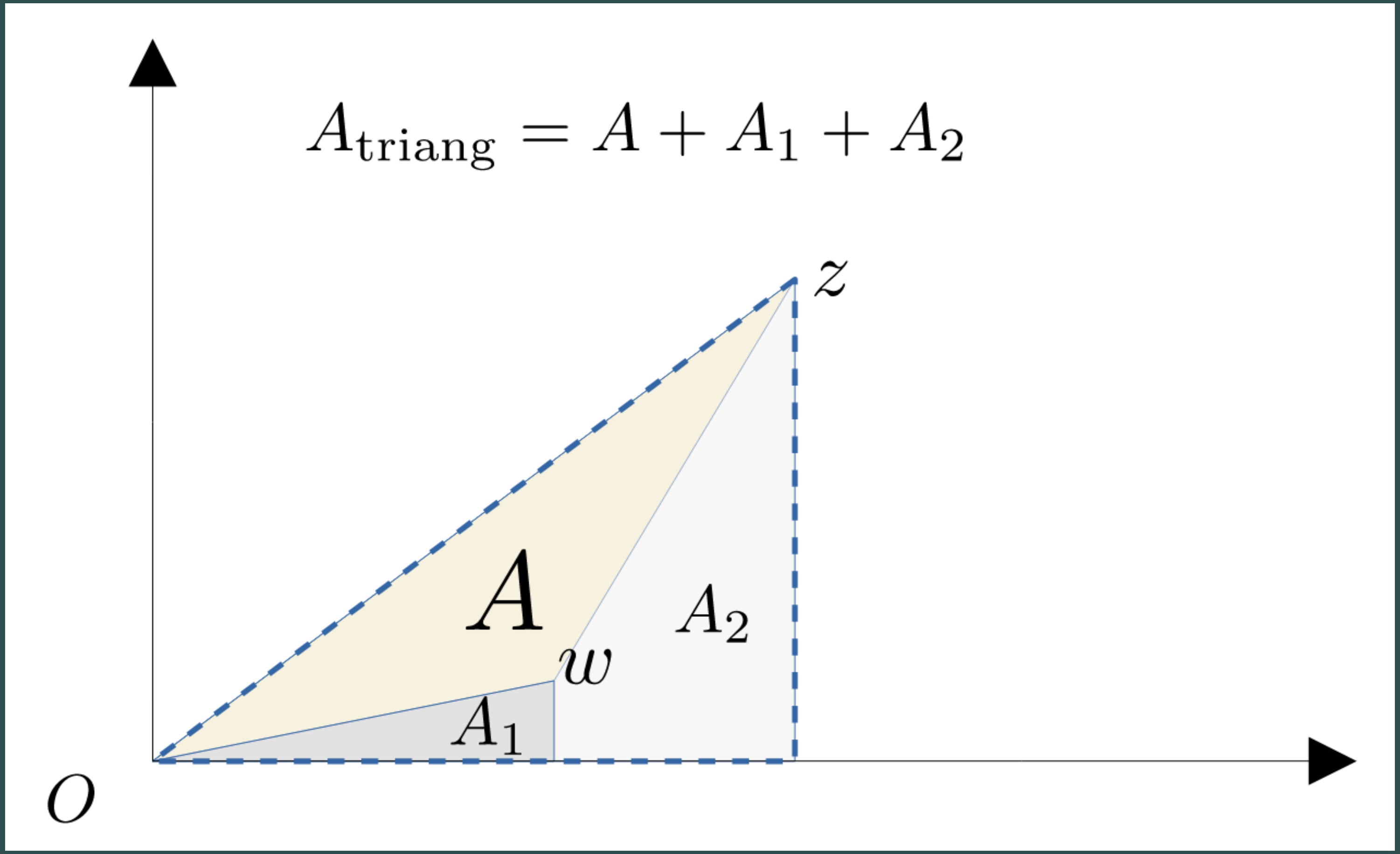
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left|\operatorname{Im}(\overline{z}w)\right| &= \frac{1}{2}\left|\operatorname{Im}((x_z - y_z i)\cdot(x_w + y_w i))\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\operatorname{Im}((x_z x_w + y_z y_w) + (x_z y_w - y_z x_w) i)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|x_z y_w - y_z x_w\right|\end{aligned}$$

Forniamo una soluzione geometrica ed una vettoriale

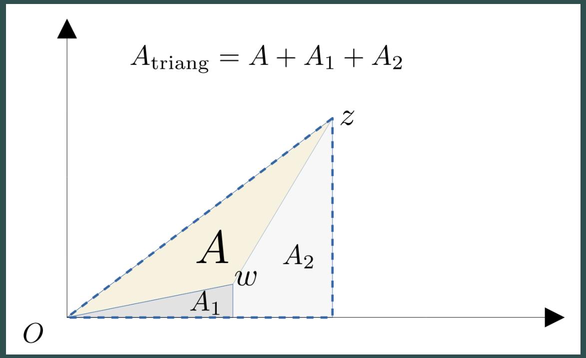
Esercizio 5

Per la soluzione geometrica osserviamo la figura, dove

"Area con sengno" = "Area triangolo" - "Area triangolo 1" - "Area trapezio"



Esercizio 5

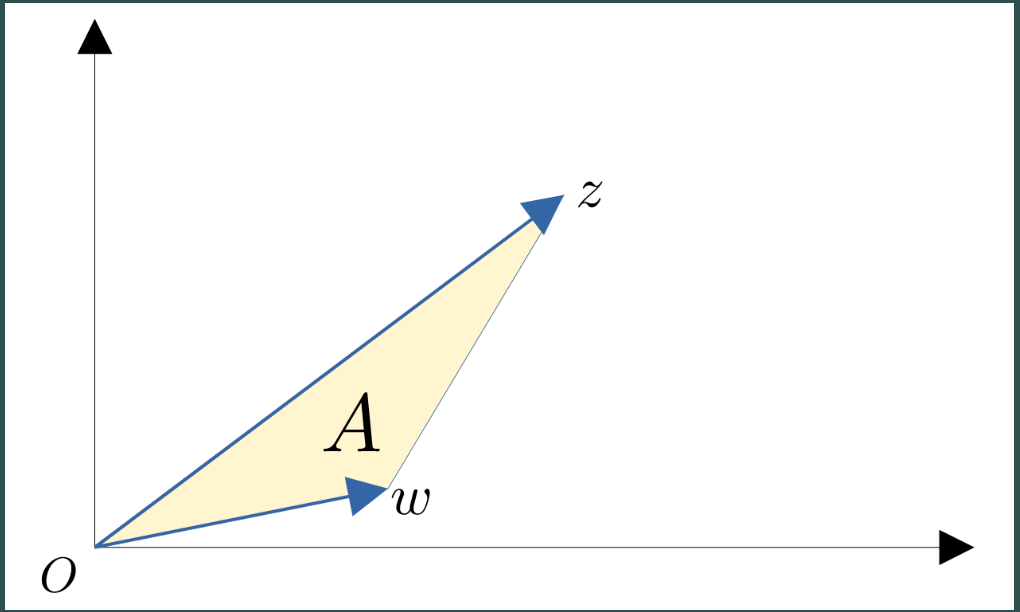


Quindi, si ha

$$
\begin{aligned}
A_{\text{sign}} &= \frac{1}{2}x_z y_z - \frac{1}{2}x_w y_w - \left(\frac{(y_w + y_z)\cdot(x_z - x_w)}{2}\right) \\
&= \cancel{\frac{1}{2}x_z y_z} - \cancel{\frac{1}{2}x_w y_w} - \frac{1}{2}y_w x_z - \cancel{\frac{1}{2}x_z y_z} + \cancel{\frac{1}{2}x_w y_w} + \frac{1}{2}y_z x_w \\
&= -\frac{1}{2}y_w x_z + \frac{1}{2}y_z x_w \\
&= \frac{1}{2}(y_z x_w - x_z y_w)
\end{aligned}
$$

Esercizio 5

Per la soluzione vettoriale osserviamo la figura.



I punti $O = (0, 0)$, $z = (x_z, y_z)$ e $w = (x_w, y_w)$ rappresentano i vertici di un triangolo, la cui area è

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_z - 0 & y_z - 0 \\ x_w - 0 & y_w - 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| x_z y_w - y_z x_w \right|$$


FINE
Manolo Venturin