

Esercizi parte 1 (A)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~

# Indice degli esercizi

## (corso Analisi Matematica 1)

1. Rappresentare sul piano di Gauss i seguenti numeri complessi:

- $z_1 = 2 - i, z_2 = 2 + 2i, z_3 = z_1 + z_2, z_4 = z_2 - z_1, \text{ e } z_5 = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2. Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi

- $z_1 = \frac{2-i}{3-4i} \text{ e } z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$

3. Dato il numero complesso  $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ , trovare

- $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z), |z| \text{ e } z^{-1}$

4. Dati i numeri complessi  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = 3 - 4i$  eseguire le seguenti operazioni

- $|2z_1 - z_2| \text{ e } \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

5. Dati i numeri complessi  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = 3 - 4i$  eseguire le seguenti operazioni

- $z_1^2 + 2z_2 |z_2| - \overline{z_1} \text{ e } \overline{z_1 - z} = z_2 \text{ (trovare } z)$



# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Soluzione

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento



# Esercizio 1

Rappresentare sul piano di Gauss i seguenti numeri complessi:

- $z_1 = 2 - i$
- $z_2 = 2 + 2i$
- $z_3 = z_1 + z_2$
- $z_4 = z_2 - z_1$
- $z_5 = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

# Esercizio 1

## Soluzione

Si ha

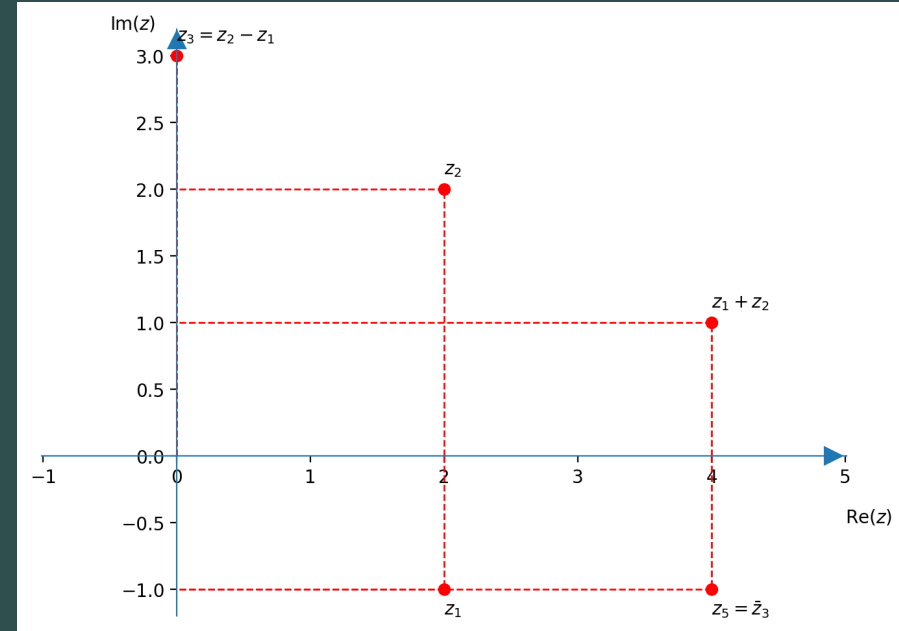
- $z_1 = 2 - i$

- $z_2 = 2 + 2i$

- $z_3 = z_1 + z_2 = (2 - i) + (2 + 2i)$   
 $= 4 + i$

- $z_4 = z_2 - z_1 = (2 + 2i) - (2 - i)$   
 $= 3i$

- $z_5 = \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_3}$   
 $= 4 - i$



# Esercizio 2

Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi

- $z_1 = \frac{2-i}{3-4i}$
- $z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$

## Soluzione

Si ha

$$z_1 = \frac{2-i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(2-i)(3+4i)}{9+16} = \frac{6+8i-3i+4}{25} = \frac{10+5i}{25} = \frac{2+i}{5}$$

e

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)^2}{3+1} = \frac{3-2\sqrt{3}i-1}{4} = \frac{2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$



# Esercizio 3

Dato il numero complesso  $z = \left( \frac{1+i}{1-i} \right)$ , trovare

- $\operatorname{Re}(z)$  e  $\operatorname{Im}(z)$
- $|z|$
- $z^{-1}$

## Soluzione

Scriviamo il numero in forma algebrica:

$$z = \left( \frac{1+i}{1-i} \right) \cdot \left( \frac{1+i}{1+i} \right) = \left( \frac{1 + 2i + \cancel{i^2}}{1 + 1} \right) = \frac{2i}{2} = i$$

da cui

$$\operatorname{Re}(i) = 0 \quad , \quad \operatorname{Im}(i) = 1 \quad , \quad |i| = 1 \quad , \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = -i$$





# Esercizio 4

Dati i numeri complessi  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = 3 - 4i$  eseguire le seguenti operazioni

- $|2z_1 - z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$

## Soluzione

Si ha

- $2z_1 - z_2 = 2(1 + i) - (3 - 4i) = 2 + 2i - 3 + 4i = -1 + 6i$
- $|2z_1 - z_2| = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{3-4i} = \frac{1+i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(1+i)(3+4i)}{25} = \frac{-1+7i}{25}$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{-1+7i}{25} \right| = \frac{|-1+7i|}{25} = \frac{\sqrt{1+49}}{25} = \frac{\sqrt{2}}{5}$



# Esercizio 5

Dati i numeri complessi  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = 3 - 4i$  eseguire le seguenti operazioni

1.  $z_1^2 + 2z_2 |z_2| - \overline{z_1}$

2. trovare  $z$  tale che  $\overline{z_1 - z} = z_2$

## Soluzione 1

Si ha

- $z_1^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$
- $2z_2 |z_2| = 2(3 - 4i)\sqrt{9 + 16} = 2(3 - 4i)5 = 10(3 - 4i) = 30 - 40i$
- $-\overline{z_1} = -(1 - i) = -1 + i$
- $z_1^2 + 2z_2 |z_2| - \overline{z_1} = 2i + 30 - 40i - 1 + i = 29 - 37i$



# Esercizio 5

## Soluzione 2

Si ha

- $\overline{z_1 - z} = z_2 \implies z_1 - z = \overline{z_2} \implies z = z_1 - \overline{z_2}$
- $z = (1 + i) - \overline{3 - 4i} = (1 + i) - (3 + 4i) = -2 - 3i$

**Nota:** Si poteva risolvere anche ponendo  $z = a + bi$  e risolvendo il sistema di equazioni che ne risultava (uguagliando le parti reali e immaginarie), ma questo procedimento era sicuramente più lento



FINE