# Definizione assiomatica o modello vettoriale

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

# Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Formalismo algebrico
- Formalizzazione assiomatica (o modello vettoriale)
- Relazione con la forma algebrica
- Esempio legge distributiva

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

# Formalismo algebrico

Nella costruzione di $z = a + bi$ è importante partire dall'oggetto $i$ che gode della proprietà $i^2 = -1$

e da questo poi con le usuali regole dell'algebra segue che

- $\sqrt{-1} = i$
- $\sqrt{-1} = -i$ i.e. $(-i) \cdot (-i) = -1$

cioè ci sono due radici di $\sqrt{-1}$ che sono $\pm i$

# Modello per i numeri complessi

Esistono diversi modelli

- **modello vettoriale** (qui adottato)
- modello matriciale
- modello polinomiale (attraverso la teoria dei gruppi)

Il modello vettoriale permette di associare il numero $x + yi$ con la coppia $(x, y)$ e questo ci tornerà utile nella rappresentazione grafica dei numeri complessi

# Formalizzazione assiomatica (o modello vettoriale)

Si definisce numero complesso la coppia ordinata $(a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, tale che valgono le seguenti operazioni:

- Uguaglianza: $(a, b) = (c, d)$ sse $a = c$ e $b = d$
- Addizione: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Moltiplicazione: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

L'insieme dei numeri complessi è definito come

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

# Relazione con la forma algebrica

La moltiplicazione per una costante diventa:

$$m \cdot (a, b) = (m, 0) \cdot (a, b) = (ma - 0, mb + 0) = (ma, mb)$$

Dalla definizione di addizione e moltiplicazione si ha

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$
$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \cdot (1, 0)$$

Il numero complesso $z = a + bi$ corrisponde alla coppia $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ dove

- $(1, 0)$ corrisponde al numero reale al numero $1$
- $(0, 1)$ corrisponde al numero immaginario $i$

Lo zero complesso $(0, 0)$ corrisponde al numero reale $0$

# Operazioni

Dalla definizione segue che le operazioni soddisfano la legge

- commutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- associativa: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ e $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
- distributiva: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Gli elementi neutri sono

- addizione: $(0, 0)$, infatti $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$
- moltiplicazione: $(1, 0)$, infatti $(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$

# Esempio

> Dimostrare la legge distributiva $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

**Dimostrazione**

Sia $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ e $z_3 = (a_3, b_3)$ allora

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) + (a_3, b_3)) \\
&= (a_1, b_1) \cdot (a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\
&= (a_1 \cdot (a_2 + a_3) - b_1 \cdot (b_2 + b_3), a_1 \cdot (b_2 + b_3) + b_1 \cdot (a_2 + a_3)) \\
&= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3, a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3) \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 a_3 - b_1 b_3, a_1 b_3 + b_1 a_3) \\
&= (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3) \\
&= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3
\end{aligned}$$

**Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento**

# FINE