

Dimostrazione delle proprietà del modulo

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~

# Indice (corso Analisi Matematica 1)

Dimostrazioni relative al modulo

1.  $z = 0$  sse  $|z| = 0$

2.  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

3. Se  $z \neq 0$  allora  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$

4. Se  $w \neq 0$  allora  $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$

5.  $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ ,  $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$  e  $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

6.  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (disuguaglianza triangolare)

7.  $||z| - |w|| \leq |z - w|$  (disuguaglianza triangolare inversa)

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Dimostrazioni

# Proprietà del modulo 1

Dimostrare che  $z = 0$  sse  $|z| = 0$

## Dimostrazione

**Caso:**  $\implies$

Se  $z = 0 = 0 + 0i$  allora  $|0 + 0i| = 0$

**Caso:**  $\impliedby$

Se  $|z| = 0$  allora  $a^2 + b^2 = 0$

La somma di due quadrati è zero solamente se entrambi i quadrati sono zero, quindi  $a = 0$  e  $b = 0$ , da cui la tesi

# Proprietà del modulo 2

Dimostrare che

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

## Dimostrazione

Sia  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , allora

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

e quindi

$$\begin{aligned} |z| \cdot |w| &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd} \\ &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = |z \cdot w| \end{aligned}$$



# Proprietà del modulo 3

Dimostrare che se  $z \neq 0$  allora

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

## Dimostrazione

Da  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$  si ha

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

da cui

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right| = \frac{1}{|z|^2} \cdot |\bar{z}| = \frac{1}{|z|^2} \cdot |z| = \frac{1}{|z|}$$



# Proprietà del modulo 4

Dimostrare che se  $w \neq 0$  allora

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

## Dimostrazione

Se  $w \neq 0$  si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{w} \right| &= |z \cdot w^{-1}| \\ &= |z| \cdot |w^{-1}| \\ &= |z| \cdot |w|^{-1} \\ &= \frac{|z|}{|w|} \end{aligned}$$



# Proprietà del modulo 5

Dimostrare che

1.  $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$

2.  $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

3.  $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

## Dimostrazione

Sia  $z = a + bi$  allora

$$\operatorname{Re}(z) = a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

e

$$\operatorname{Im}(z) = b \leq |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$



da cui le prime due tesi

# Proprietà del modulo 5

Da

$$a^2 + b^2 \leq (|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|a||b|$$

segue che

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b| = |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$

da cui la tesi

# Proprietà del modulo 6

Dimostrare (disuguaglianza triangolare) che

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

## Dimostrazione

Ricordiamo che

1.  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$
2.  $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$

# Proprietà del modulo 6

Si ha

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \cdot \overline{(z + w)} = z\bar{z} + (z\bar{w} + \bar{z}w) + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2 \\ &\quad (\text{usando } z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \text{ si ha}) \\ &= |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\quad (\text{usando } \operatorname{Re}(z) \leq |z| \text{ si ha}) \\ &\leq |z|^2 + 2 |z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2 |z| |w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

Essendo i moduli  $|z + w|$ ,  $|z|$  e  $|w|$  positivi segue la disuguaglianza  $|z + w| \leq |z| + |w|$

# Proprietà del modulo 7

Dimostrare (disuguaglianza triangolare inversa) che

$$||z| - |w|| \leq |z - w|$$

## Dimostrazione

Dalla disuguaglianza triangolare si ha

$$|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w| \implies |z| - |w| \leq |z - w|$$

e

$$\begin{aligned} |w| &= |(w - z) + z| \leq |w - z| + |z| = |z - w| + |z| \implies |w| - |z| \leq |z - w| \\ &\implies |z| - |w| \geq -|z - w| \end{aligned}$$

# Proprietà del modulo 7

da cui

$$\begin{aligned} \begin{cases} |z| - |w| \leq |z - w| \\ |z| - |w| \geq -|z - w| \end{cases} &\implies -|z - w| \leq |z| - |w| \leq |z - w| \\ &\implies ||z| - |w|| \leq |z - w| \end{aligned}$$

**Nota:** Ricordiamo che  $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$



FINE