Dimostrazione delle proprietà del coniugato

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Indice (corso Analisi Matematica 1)

Dimostrazioni relative al coniugato

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$
5. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$
6. $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
7. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Dimostrazioni

Proprietà del coniugato [1]

> Dimostrare che
>
> $$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

Dimostrazione

Sia $z = a + bi$ e $w = c + di$, allora

$$\begin{aligned}
\overline{z+w} &= \overline{(a+bi)+(c+di)} \\
&= \overline{(a+c)+(b+d)i} \\
&= (a+c)-(b+d)i \\
&= (a-bi)+(c-di) \\
&= \overline{a+bi} + \overline{c+di} \quad = \quad \bar{z} + \bar{w}
\end{aligned}$$

Proprietà del coniugato 2

> Dimostrare che
>
> $$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

Dimostrazione

Sia $z = a + bi$ e $w = c + di$, allora

$$\begin{aligned}
\overline{z \cdot w} &= \overline{(a+bi)\cdot(c+di)} \\
&= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} \\
&= (ac-bd)-(ad+bc)i \\
&= (ac-adi)-(bd+bci) \\
&= a(c-di)-bi(c-di) \\
&= (a-bi)\cdot(c-di) \\
&= \overline{a+bi}\cdot\overline{c+di} \;=\; \overline{z}\cdot\overline{w}
\end{aligned}$$

Proprietà del coniugato 3

> Dimostrare che
>
> $$\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$$

Dimostrazione

Da $z^{-1} \cdot z = 1$ si ha $\overline{z^{-1} \cdot z} = 1$ e quindi dalla proprietà del prodotto ($\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$) da cui segue

$$\overline{z^{-1}} \cdot \overline{z} = 1$$

Confrontando la relazione precedente con la relazione $\overline{z}^{-1} \cdot \overline{z} = 1$, si ha

$$\begin{cases} \overline{z^{-1}} \cdot \overline{z} = 1 \\ \overline{z}^{-1} \cdot \overline{z} = 1 \end{cases} \implies \overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$$

Proprietà del coniugato 4

Dimostrare che

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \overline{z \cdot w^{-1}} \\ &= \overline{z} \cdot \overline{w^{-1}} \\ &= \overline{z} \cdot \overline{w}^{-1} \quad = \quad \frac{\overline{z}}{\overline{w}}\end{aligned}$$

Proprietà del coniugato 5

> Dimostrare che
>
> $$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

Dimostrazione

Sia $z = a + bi$ allora

- $\mathrm{Re}(z) = a$
- $\overline{z} = a - bi$
- $\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{(a+\cancel{bi})+(a-\cancel{bi})}{2} = \frac{\cancel{2}\,a}{\cancel{2}} = a$

da cui la tesi

Proprietà del coniugato 6

> Dimostrare che
>
> $$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Dimostrazione

Sia $z = a + bi$ allora

- $\mathrm{Im}(z) = b$
- $\overline{z} = a - bi$
- $\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{(\cancel{a} + bi) - (\cancel{a} - bi)}{2i} = \frac{\cancel{2}\, b\cancel{i}}{\cancel{2i}} = b$

da cui la tesi

Proprietà del coniugato 7

> Dimostrare che
>
> $$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

Dimostrazione

Sia $z = a + bi$ allora

- $|z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$
- $\overline{z} = a - bi$
- $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$

da cui la tesi


FINE
Manolo Venturin