Coniugato e modulo

(e proprietà)

Numeri complessi

Manolo Venturin

~~~ 10 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Coniugato e sue proprietà
- Modulo e sue proprietà
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Coniugato

Se $z = a + bi$ il **coniugato** è definito come

$$\overline{z} = a - bi$$

Osserviamo che

- z e $\overline{z}$ hanno
  - la stessa parte reale $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_1)$
  - opposta la parte immaginaria $\mathrm{Im}(z_1) = -\mathrm{Im}(z_2)$
- altre notazioni comuni sono z^* oppure $\mathrm{conj}(z)$

Modulo

Se $z = a + bi$ il **modulo** (o valore assoluto) è definito come

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Osserviamo che

- se z è reale, i.e. $\mathrm{Im}(z) = 0$, allora il modulo coincide con la definizione di valore assoluto di un numero reale $|x| = \sqrt{x^2}$
- $|z| \geq 0$

Proprietà del coniugato

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ e $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

4. Legame con la parte reale: $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \implies z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
5. Legame con la parte immaginaria: $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \implies z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
6. Legame con il modulo e l'inverso: $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, e dunque se $z \neq 0$ si ha $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Dimostrazioni prossimi video

Proprietà del modulo

1. $z = 0$ sse $|z| = 0$
2. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
3. Se $w \neq 0$ allora $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

4. $\mathrm{Re}(z) \leqslant |\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$
5. $\mathrm{Im}(z) \leqslant |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$

6. $|z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$
7. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (disuguaglianza triangolare)
8. $\big| |z| - |w| \big| \leqslant |z - w|$ (disuguaglianza triangolare inversa)

Esempi

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Esempio 1

> Calcolare il modulo e il coniugato di
>
> $$z = 1 - 2i$$
>
> e verificare che $\overline{\overline{z}} = z$

Soluzione

Da $z = 1 - 2i$ si ha

- $|z| = |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- $\overline{z} = 1 + 2i$
- $\overline{\overline{z}} = \overline{1 + 2i} = 1 - 2i = z$

Esempio 2

Dati $z = 1 - 2i$ e $w = 2 + i$, verificare le seguenti proprietà del coniugato

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

Esempio 2

Soluzione 1

Da $z = 1 - 2i, w = 2 + i$ si ha

- $z + w \;=\; (1 - 2i) + (2 + i) \;=\; 3 - i$
- $\overline{z + w} \;=\; \overline{3 - i} \;=\; 3 + i$
- $\overline{z} \;=\; \overline{1 - 2i} \;=\; 1 + 2i$
- $\overline{w} \;=\; \overline{2 + i} \;=\; 2 - i$
- $\overline{z} + \overline{w} \;=\; (1 + 2i) + (2 - i) \;=\; 3 + i$

da cui $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

Esempio 2

Soluzione 2

Da $z = 1 - 2i$, $w = 2 + i$ si ha

- $z \cdot w \;=\; (1-2i)\cdot(2+i) \;=\; 2 + i - 4i - 2i^2 \;=\; 4 - 3i$
- $\overline{z \cdot w} \;=\; \overline{4 - 3i} \;=\; 4 + 3i$
- $\overline{z} \;=\; \overline{1 - 2i} \;=\; 1 + 2i$
- $\overline{w} \;=\; \overline{2 + i} \;=\; 2 - i$
- $\overline{z} \cdot \overline{w} \;=\; (1+2i)\cdot(2-i) \;=\; 2 - i + 4i - 2i^2 \;=\; 4 + 3i$

da cui $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Esempio 2

Soluzione 3

Da $z = 1 - 2i$, $w = 2 + i$ si ha

- $\frac{z}{w} = \frac{1-2i}{2+i} = \frac{1-2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-4i-i+2i^2}{4-i^2} = \frac{0-5i}{5} = -i$
- $\overline{z} = \overline{1-2i} = 1+2i$
- $\overline{w} = \overline{2+i} = 2-i$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{-i} = i$
- $\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \frac{1+2i}{2-i} = \frac{1+2i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{2+4i+i+2i^2}{4-i^2} = \frac{0+5i}{5} = i$

da cui $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

Esempio 3

Dato $z = 1 - 2i$, utilizzando le proprietà del coniugato, calcolare

- $\mathrm{Re}(z)$
- $\mathrm{Im}(z)$
- $|z|$
- z^{-1}

Esempio 3

Soluzione

- $\bar{z} = 1 + 2i$
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{(1-\cancel{2i})+(1+\cancel{2i})}{2} = \frac{2}{2} = 1$
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{(\cancel{1}-2i)-(\cancel{1}+2i)}{2i} = \frac{-4i}{2i} = -2$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (1-2i)\cdot(1+2i) = 1 + 2^2 = 5 \implies |z| = \sqrt{5}$
- $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1+2i}{5}$
- Verifica inverso: $z \cdot z^{-1} = (1-2i)\cdot\frac{1+2i}{5} = \frac{1-4i^2}{5} = 1 = 1 + 0i$

Esempio 4

Dati i numeri complessi $z = 1 - 2i$ e $w = 2 + i$, verificare le seguenti proprietà del modulo

1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
2. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
3. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$
4. $\big|\,|z| - |w|\,\big| \leqslant |z - w|$

Esempio 4

Soluzione 1

Da $z = 1 - 2i$ e $w = 2 + i$, si ha

- $z \cdot w \; = \; (1 - 2i) \cdot (2 + i) \; = \; 2 + i - 4i - 2i^2 \; = \; 4 - 3i$
- $|z \cdot w| \; = \; |4 - 3i| \; = \; \sqrt{16 + 9} \; = \; 5$
- $|z| \; = \; |1 - 2i| \; = \; \sqrt{1 + 4} \; = \; \sqrt{5}$
- $|w| \; = \; |2 + i| \; = \; \sqrt{4 + 1} \; = \; \sqrt{5}$
- $|z| \cdot |w| \; = \; \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \; = \; 5$

da cui $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Esempio 4

Soluzione 2

Da $z = 1 - 2i$ e $w = 2 + i$, si ha

- $\frac{z}{w} = \frac{1-2i}{2+i} = \frac{1-2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-4i-i+2i^2}{4-i^2} = \frac{0-5i}{5} = -i$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = |i| = 1$
- $|z| = |1 - 2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
- $|w| = |2 + i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
- $\frac{|z|}{|w|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$

da cui $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Esempio 4

Soluzione 3

Da $z = 1 - 2i$ e $w = 2 + i$, si ha

- $z + w = (1 - 2i) + (2 + i) = 3 - i$
- $|z + w| \; = \; |3 - i| \; = \; \sqrt{9+1} \; = \; \sqrt{10} \; = \; \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$
- $|z| \; = \; |1 - 2i| \; = \; \sqrt{1+4} \; = \; \sqrt{5}$
- $|w| \; = \; |2 + i| \; = \; \sqrt{4+1} \; = \; \sqrt{5}$
- $|z| + |w| \; = \; \sqrt{5} + \sqrt{5} \; = \; 2\sqrt{5}$
- $|z + w| \leqslant |z| + |w| \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \leqslant 2\sqrt{5}$ vera

da cui $|z + w| \leqslant |z| + |w|$

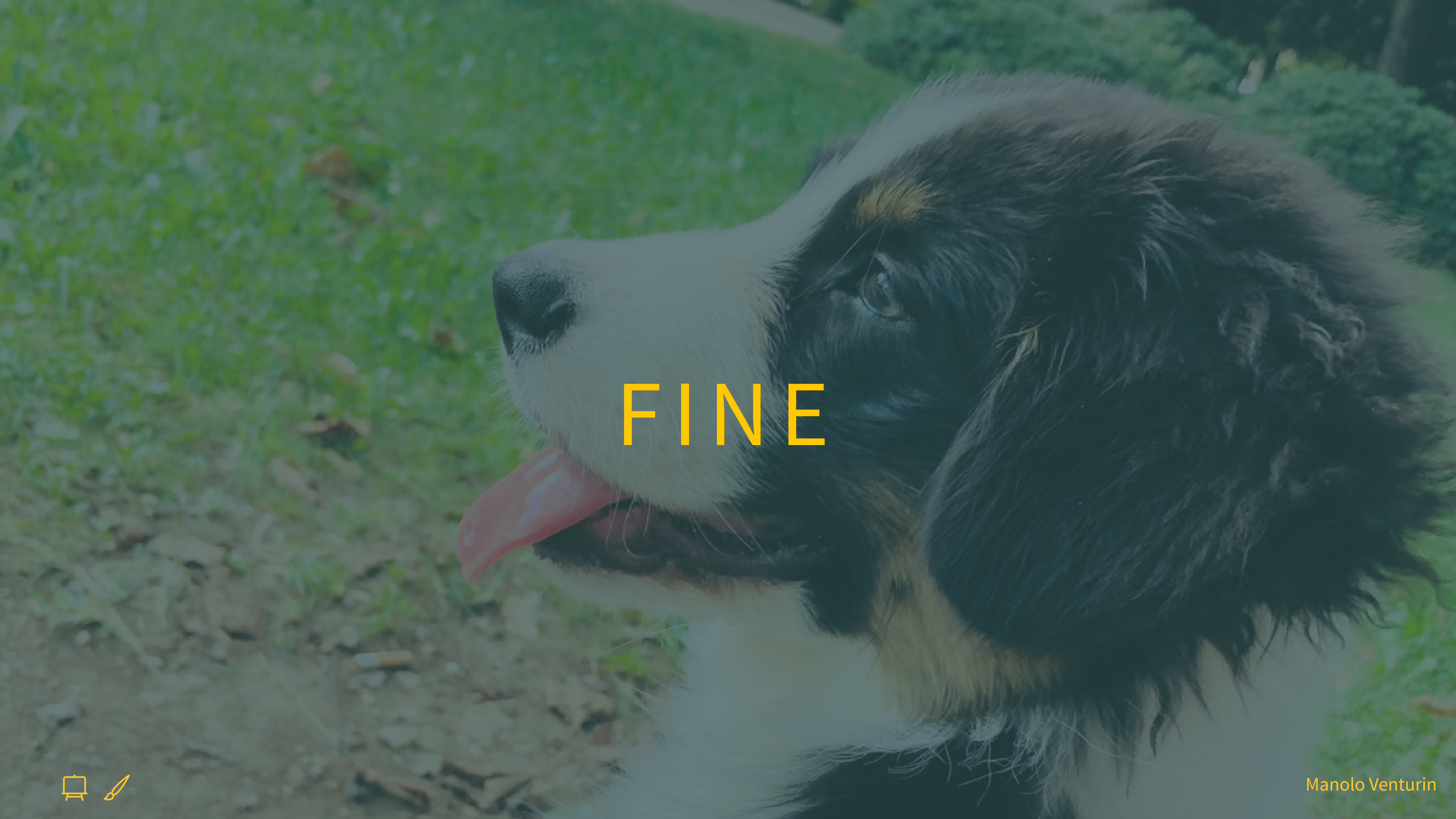
Esempio 4

Soluzione 4

Da $z = 1 - 2i$ e $w = 2 + i$, si ha

- $|z| \;=\; |1-2i| \;=\; \sqrt{1+4} \;=\; \sqrt{5}$
- $|w| \;=\; |2+i| \;=\; \sqrt{4+1} \;=\; \sqrt{5}$
- $||z|-|w|| \;=\; \left|\sqrt{5}-\sqrt{5}\right| \;=\; 0$
- $z - w \;=\; (1-2i)-(2+i) = (1-2)+(-2-1)i \;=\; -1-3i$
- $|z-w| \;=\; |-1-3i| \;=\; \sqrt{1+9} \;=\; \sqrt{10}$

da cui $\big|\,|z|-|w|\,\big| \leqslant |z-w|$



FINE